

**SISTEMA DE UNIVERSIDADES ESTATALES DEL CARIBE COLOMBIANO
SUE CARIBE**



MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

**INFLUENCIA DEL APRENDIZAJE COLABORATIVO MEDIADO POR UN
AMBIENTE DE LIDERAZGO, EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO
MATEMÁTICO EN ESTUDIANTES DE MEDIA ACADÉMICA**

LENIS JUDITH SIERRA LLORENTE

Directora:

JUANA ROBLES GONZÁLEZ

Magíster en Estadística

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

2.019

**INFLUENCIA DEL APRENDIZAJE COLABORATIVO MEDIADO POR UN
AMBIENTE DE LIDERAZGO, EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO
MATEMÁTICO EN ESTUDIANTES DE MEDIA ACADÉMICA**

Presentado por:

LENIS JUDITH SIERRA LLORENTE

Trabajo de investigación para optar al título de Magister en Educación

Directora:

JUANA ROBLES GONZÁLEZ

Magister en Estadística

Línea de investigación:

**CONTEXTO EDUCATIVO, MEDIACIÓN COGNITIVA, PEDAGÓGICA Y
TECNOLÓGICA.**

Grupo de Investigación: (CYMTED-L)

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS HUMANAS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

COLOMBIA

2.019

Nota de aceptación

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Montería, Julio de 2019

Dedicatoria

A Dios por darme la sabiduría e inteligencia para alcanzar mis metas.

A mi hija Nicole por su amor incondicional, su paciencia y por ser el aliciente que me hace ser cada día un mejor ser humano.

A mi padres y hermanos por el apoyo que me han brindado en el camino por alcanzar mis objetivos.

Al Especialista Rubén Enrique Taboada Torres, porque sin su impulso, sostén y tenacidad este logro no hubiese sido posible.

Agradecimientos

A Dios, por su amor e infinita bondad y permitirme sonreír ante mis logros, ayudándome a superar los obstáculos a lo largo de mi vida.

A la Universidad de Córdoba por abrirme nuevamente sus puertas y alcanzar un logro académico más en mi vida.

A mi asesora de tesis Mgr. Juana Robles González por permitirme recurrir a su capacidad y conocimiento científico para el desarrollo de esta investigación; así como también, por la paciencia que siempre tuvo en guiarme durante todo el proceso.

Al Esp. Rubén Enrique Taboada Torres por permitirme la ejecución de esta investigación en la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario.

A los estudiantes de la promoción NEXUS 2018, por su colaboración y entusiasmo para la realización del proyecto.

A los docentes de la SUE Caribe quienes compartieron sus conocimientos y siempre fueron un sostén para que este proyecto llegara a su fin.

Finalmente, a los que fueron mis compañeros durante todos los niveles de la universidad, puesto que, gracias a su compañerismo y amistad también hicieron un aporte importante en las ganas de terminar este trabajo.

Resumen

La presente investigación tiene como objetivo establecer la influencia del aprendizaje colaborativo mediado por un ambiente de liderazgo, en el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario, en el municipio de Valencia – Córdoba. El problema gira entorno a las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y que se reflejan en los resultados obtenidos por los educandos en las pruebas internas y externas. El estudio está enmarcado dentro del paradigma empírico analítico, el proceso de análisis y procesamiento de datos se asume desde el método cuantitativo aplicando un diseño metodológico cuasi-experimental desarrollado en siete etapas. Los resultados obtenidos en esta investigación fueron corroborados con la aplicación de las pruebas no paramétricas de Man Whitney y de Wilcoxon, disponibles en el software SPSS versión libre. Se destaca que los estudiantes pertenecientes al grupo experimental alcanzaron mejoras significativas en cuanto al desarrollo del pensamiento matemático medido a través del componente geométrico métrico y del componente aleatorio, después de ser intervenidos con la estrategia de aprendizaje colaborativo. Por otro lado, se encontró en el desarrollo de la competencia argumentativa del componente aleatorio que, a pesar de que hubo diferencias entre los rangos promedios del grupo experimental, éstas no fueron significativas. Lo que permitió concluir que la estrategia de aprendizaje colaborativo, es eficaz para gran parte de los estudiantes, en el desarrollo del pensamiento matemático.

Palabras claves:

Pensamiento matemático, aprendizaje colaborativo, componente geométrico métrico, componente aleatorio.

Abstract

This research has as objective to establish the influence of collaborative learning mediated by an environment of leadership, in the development of mathematical thinking in tenth grade students of the Nuestra Señora del Rosario Educational Institution, in the municipality of Valencia - Córdoba. The problem revolves around the difficulties that they show in the maths teaching and learning process and what they reflect in the results obtained by students in their external and internal tests. This research is framed inside the analytical – empirical paradigm, the analysis and processing of datum is assumed by the quantitative method applying a methodological, quasi – experimental design developed in seven stages. The results obtained in this investigation were corroborated with the application of the non-parametric tests of Man Whitney and Wilcoxon, available in SPSS software. It is noted that the students belonging to the experimental group achieved significant improvements in the development of mathematical thinking measured through the geometric metric component and the random component, after being intervened with the collaborative learning strategy. On the other hand, it was found in the development of the argumentative competence of the random component that, although there were differences between the average ranks of the experimental group, these were not significant. We concluded that the collaborative learning strategy is effective to majority of students in the mathematical thinking development.

Keywords:

Mathematician thinking, collaborative learning, geometric metric component, random component

Tabla de Contenido

Introducción	1
1. Descripción y planteamiento del problema	3
1.1 Antecedentes del problema.....	3
1.2 Formulación del problema.....	12
1.3 Justificación de la investigación	12
1.4 Objetivos.....	13
1.4.1 Objetivo general.....	13
1.4.2 Objetivos específicos	14
2. Marco de referencia	15
2.1 Antecedentes de la investigación.....	15
2.2 Marco teórico conceptual	29
2.3 Marco contextual	39
3. Metodología de la investigación	41
3.1 Enfoque y tipo de investigación	41
3.2 Diseño metodológico.....	41
3.2.1 Población y muestra.....	41
3.2.2 Operacionalización de variables	41
3.2.3 Fases o etapas de la investigación.....	44
Etapa 1. Elección de los grupos objeto de estudio.....	45
Etapa 2. Aplicación de prueba pretest en ambos grupos	45
Etapa 3. Selección de líderes en el grupo experimental	46
Etapa 4. Elaboración de guías didácticas	47
Etapa 5. Sometimiento del grupo experimental al tratamiento.....	50
Etapa 6. Aplicación de prueba postest ambos grupos.....	52
Etapa 7. Análisis estadístico de resultados	52
3.2.4 Instrumentos (Diseño de instrumentos, validación, técnicas de aplicación)	68
3.2.4.1 Obtención de la información.....	69
3.2.4.2 Validación.....	69
3.2.4.3 Confiabilidad del instrumento de evaluación	69
3.2.5 Técnicas de análisis utilizadas	71
4. Discusión de resultados	72
5. Conclusiones y recomendaciones	74

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	137
--	------------

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Operacionalización de variables	42
Tabla 2. Sistema de hipótesis.....	44
Tabla 3. Distribución de preguntas para Pretest y Postest.....	46
Tabla 4. Resultados del test de liderazgo.....	46
Tabla 5. Convenciones entre líderes y docente investigador.....	47
Tabla 6. Cantidad de estudiantes que contestaron el pretest y el postest por grupos.	53
Tabla 7. Escala de valoración de la prueba.....	53
Tabla 8. Prueba no paramétrica de Mann Whitney para comparar grupo control con grupo experimental en la prueba pretest.....	54
Tabla 9. Prueba no paramétrica de Mann Whitney para comparar grupo control con grupo experimental en la prueba postest	59
Tabla 10. Prueba no paramétrica de Wilcoxon para comparar pretest y postest del grupo experimental.....	62
Tabla 11. Resultados pretest– postest de los líderes del grupo experimental.....	67
Tabla 12. Escala de confiabilidad.....	70
Tabla 13. Estadístico de fiabilidad test de liderazgo.	70
Tabla 14. Estadísticos de fiabilidad de los componentes aleatorio y geométrico métrico ...	71
Tabla 15. Desempeños prueba Pretest	131
Tabla 16. Desempeños prueba Postest.....	133

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Rendimiento matemático a nivel mundial.....	4
Figura 2. Rendimiento matemático en Colombia.....	4
Figura 3. Rendimiento matemático en Colombia.....	5
Figura 4. Proporción de bajo desempeño.....	5
Figura 5. Porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño en el establecimiento educativo, la entidad territorial certificada (ETC) correspondiente y el país. Matemáticas, grado noveno.....	7
Figura 6. Porcentaje de estudiantes según niveles de desempeño en matemáticas, noveno grado.....	9
Figura 7. Componentes evaluados en matemáticas, noveno grado.....	10
Figura 8. Competencias evaluadas, noveno grado.....	10
Figura 9. Niveles de desempeño de los estudiantes del GC y del GE en el pretest.....	54
Figura 10. Niveles de desempeño de los estudiantes del GC y del GE en el componente aleatorio.....	55
Figura 11. Niveles de desempeño de los estudiantes del GC y del GE en el componente Geométrico métrico.....	56
Figura 12. Niveles de desempeño de los estudiantes del GC y del GE en las competencias del componente aleatorio.....	57
Figura 13. Niveles de desempeño de los estudiantes del GC y del GE en las competencias del componente geométrico métrico.....	58
Figura 14. Niveles de desempeño de los estudiantes del GC y del GE en el postest.....	59
Figura 15. Niveles de desempeño de los estudiantes del GC y del GE en el componente aleatorio en la prueba postest.....	60
Figura 16. Niveles de desempeño de los estudiantes del GC y del GE en las competencias del componente aleatorio en la prueba postest.....	60
Figura 17. Niveles de desempeño de los estudiantes del GC y del GE en el componente geométrico métrico en la prueba postest.....	61
Figura 18. Niveles de desempeño de los estudiantes del GC y del GE en las competencias del componente geométrico métrico.....	61
Figura 19. Niveles de desempeño de los estudiantes del grupo experimental en pretest y postest.....	62
Figura 20. Niveles de desempeño del componente aleatorio del GE en pretest y postest....	63
Figura 21. Niveles de desempeño de las competencias del componente aleatorio del GE en pretest y postest.....	64
Figura 22. Rangos promedios de la prueba de Mann Whitney para pretest-postest grupo experimental.....	64
Figura 23. Niveles de desempeño del componente geométrico métrico del GE en pretest y postest.....	65
Figura 24. Niveles de desempeño de las competencias del componente geométrico métrico del GE en pretest y postest.....	66

LISTA DE ANEXOS

Anexo A. Carta a rector de la institución.....	77
Anexo B. Respuesta de la carta a rector de la institución.....	78
Anexo C. Consentimiento informado a padres de familia o acudientes.....	79
Anexo D. Prueba Pretest.....	80
Anexo E. Test para determinar condición de liderazgo.....	92
Anexo F. Guías didácticas a desarrollar en el grupo experimental.....	94
Anexo G. Sesiones de profundización de líderes.....	116
Anexo H. Sometimiento del grupo experimental al tratamiento.....	117
Anexo I. Prueba Postest.....	119
Anexo J. Base de datos de desempeños en los grupos control y experimental para la prueba Pretest.....	131
Anexo K. Base de datos de desempeños en los grupos control y experimental para la prueba Postest.....	133
Anexo L. Formato de validación de instrumentos.....	135
Anexo M. Constancia de juicio de experto.....	136

Introducción

La matemática permite el enriquecimiento cultural; puesto que, ayuda a la comprensión de otras disciplinas para las cuales las habilidades matemáticas se constituyen como un instrumento indispensable en la aplicación cotidiana, dado que el desarrollo tecnológico social e industrial actual así lo exige; sin embargo, las competencias básicas que debe tener todo estudiante, no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006).

Ser matemáticamente competente, requiere de adiestramiento, eficiencia y eficacia en el desarrollo de los procesos generales, específicamente en el pensamiento lógico y matemático, pero pasando por los pensamientos propuestos en los Lineamientos curriculares, Numérico, Espacial, Métrico o de Medida, Aleatorio o Probabilístico y Variacional (MEN, 2006). Todos estos, le ayudan al educando a desarrollar competencias, pero el pensamiento espacial (PE) permite la construcción y manipulación de representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones o representaciones materiales (MEN, 2006); el pensamiento métrico (PM) permite la comprensión general sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en las situaciones que se presenten; así mismo, el pensamiento aleatorio (PA) ayuda a tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, de azar, de riesgo o de ambigüedad por falta de información confiable, en las que no es posible predecir con seguridad lo que va a pasar, sin embargo, le permite hacer inferencias y le ayuda a buscar soluciones razonables a los problemas donde no hay solución clara y segura (MEN, 2006).

Con este trabajo se pretende establecer la influencia del aprendizaje colaborativo mediado por un ambiente de liderazgo, en el desarrollo del pensamiento matemático en la

Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario, en la zona urbana del municipio de Valencia, departamento de Córdoba.

1. Descripción y planteamiento del problema

1.1 Antecedentes del problema

El Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés) perteneciente a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), tiene por objeto evaluar hasta qué punto los alumnos cercanos al final de la educación obligatoria, han adquirido algunos de los conocimientos y habilidades necesarios para la participación plena en la sociedad del saber. PISA destaca a aquellos países que han alcanzado un buen rendimiento y, al mismo tiempo, un reparto equitativo de oportunidades de aprendizaje, ayudando así a establecer metas ambiciosas para otros países. (Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos [PISA], 2015a).

Así mismo, PISA es un programa continuo que evalúa la adquisición de conocimientos y habilidades fundamentales de los estudiantes de 15 años, en Ciencias, Lectura y Matemáticas, en los distintos países y en diferentes subgrupos demográficos de cada país. (PISA, 2015a).

A nivel mundial entre los países que presentan las pruebas PISA, Colombia se sitúa en el puesto 61, en cuanto al rendimiento académico presentado en el área de matemáticas, (ver Figura 1), con un puntaje de 390 puntos por debajo de la media de la OCDE, como se puede observar de manera más clara en la Figura 2; y se ha propuesto convertirse en uno de los países más competitivos de América Latina en cuanto a la educación.

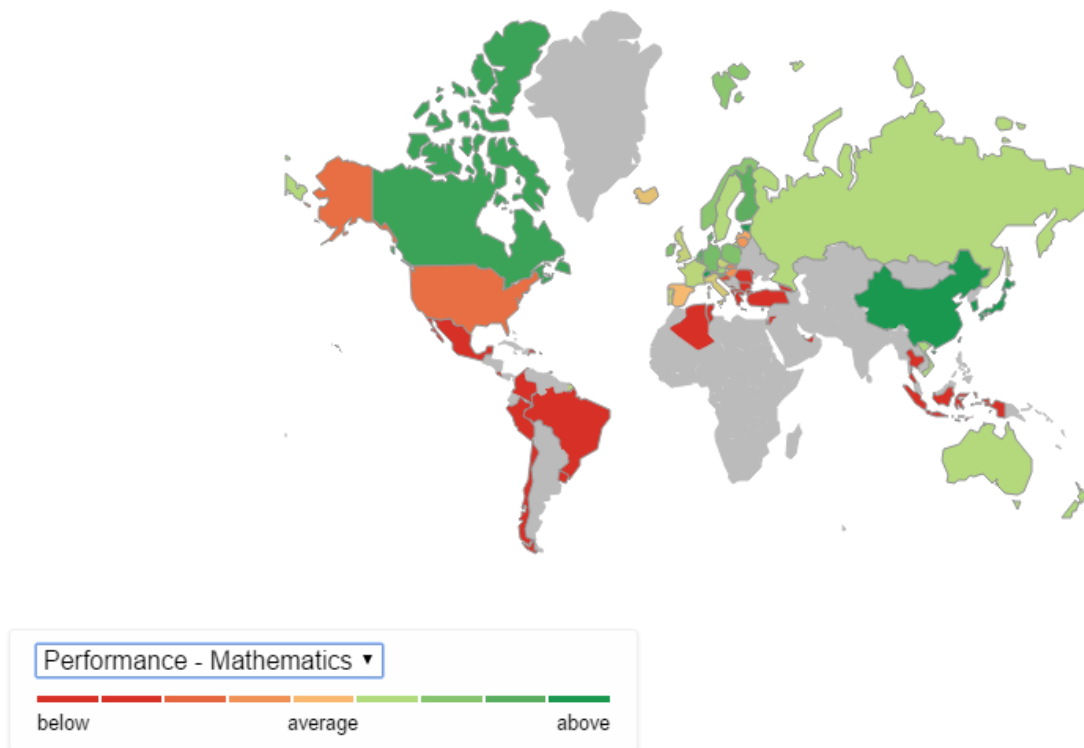


Figura 1. Rendimiento matemático a nivel mundial.

Fuente: Resultados OCDE, pruebas PISA 2015

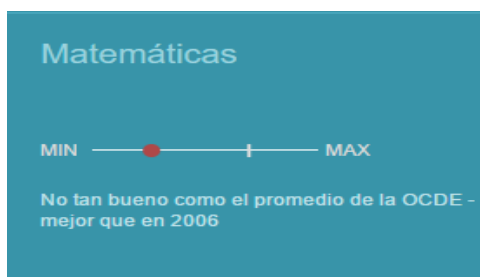


Figura 2. Rendimiento matemático en Colombia.

Fuente: Resultados OCDE, pruebas PISA 2015

La Figura 2, nos muestra el desempeño promedio, que se refiere a todos los estudiantes de 15 años del país/economía sin importar el tipo de escuela ni el grado que cursen. Aunque los resultados son mínimos, Colombia mejoró en esta última prueba.

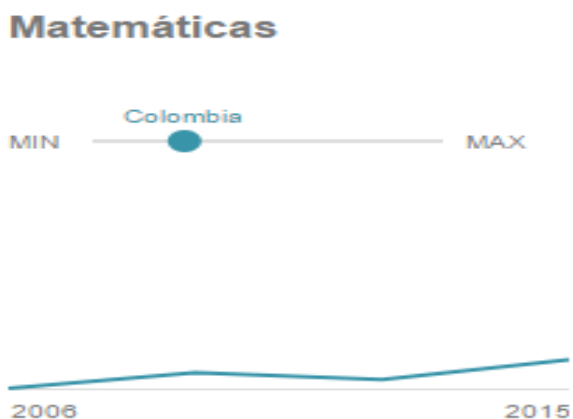


Figura 3. Rendimiento matemático en Colombia

Fuente: *Resultados OCDE, pruebas PISA 2015*

Con respecto a la proporción de más alto desempeño, en matemáticas, son capaces de tener un pensamiento y razonamiento matemático avanzado como se ilustra en la Figura 4.



Figura 4. Proporción de bajo desempeño

Fuente: *Resultados OCDE, pruebas PISA 2015*

Aunque Colombia se ha propuesto convertirse en uno de los países más competitivos de América Latina en cuanto a la educación, la realidad es otra y está lejos de lograr sus objetivos.

Por muchos años las matemáticas han sido un dolor de cabeza, no sólo para los estudiantes; sino también, para los padres y maestros. Por tal motivo, es de gran valor que la

comunidad en general, entienda la importancia del desarrollo de habilidades matemáticas, para enfrentarse con la realidad y las diferentes situaciones que rodean su entorno.

Dado que el aprendizaje de las matemáticas se desarrolla en tres contextos: inmediato, escolar y extraescolar (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006), y que además es fundamental el desarrollo de los cinco tipos de pensamientos (numérico, espacial, métrico o de medida, aleatorio o probabilístico y variacional) dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes, se hace necesaria la evaluación de estrategias que permitan que los mismos, desarrollen competencias y habilidades en la resolución de problemas de su diario vivir.

En el área de las matemáticas, uno de los principales objetivos a conseguir es que los alumnos sean competentes en el desarrollo del pensamiento lógico matemático, y esas competencias son evaluadas por el Instituto Colombiano de Fomento para la Educación Superior (ICFES), en los exámenes periódicos que realiza a los estudiantes colombianos.

Ahora bien, en relación con la prueba saber 3°, 5° y 9°, de donde se obtienen resultados individuales a nivel de los establecimientos educativos, sobre las competencias en cada una de las áreas y grados (ICFES, 2017), tiene como propósito diagnosticar los conocimientos que tienen los estudiantes mediante la realización de evaluaciones periódicas, en las que se evalúan las competencias básicas que dan a conocer las fortalezas y debilidades de las instituciones educativas, y puedan ser aplicados planes de mejoramiento para optimizar la calidad educativa. (ICFES, 2016c).

Por lo tanto, los resultados de estas pruebas y el análisis de los factores que inciden en los mismos, permiten que los establecimientos educativos, las secretarías de educación, el Ministerio de Educación Nacional y la sociedad en general, identifiquen las competencias y habilidades que todos los estudiantes colombianos desarrollan durante su trayectoria escolar, definiendo planes de mejoramiento en sus respectivos ámbitos de actuación. Además, su

carácter periódico posibilita valorar cuáles han sido los avances en el tiempo, y establecer el impacto de programas y acciones específicas de mejoramiento. (ICFES, 2017).

Saber 3°, 5° y 9° produce resultados individuales y a nivel de los establecimientos educativos, sobre las competencias en cada una de las áreas y grados. (ICFES, 2016c).

A nivel general los resultados de la prueba saber 9° en Colombia evidencian que el año 2016, para el área de matemáticas se encontró que había un 20% de los estudiantes en nivel insuficiente y 6% en avanzado, lo que indica que el 74% restante se hallaron en los niveles mínimo y satisfactorio, mientras que los resultados en el departamento de Córdoba tampoco mejoran, por el contrario, solo un 2% se ubicó en nivel avanzado y 32% en nivel insuficiente lo que reduce los niveles mínimo y satisfactorio a 66% como se puede percibir en la Figura 5.

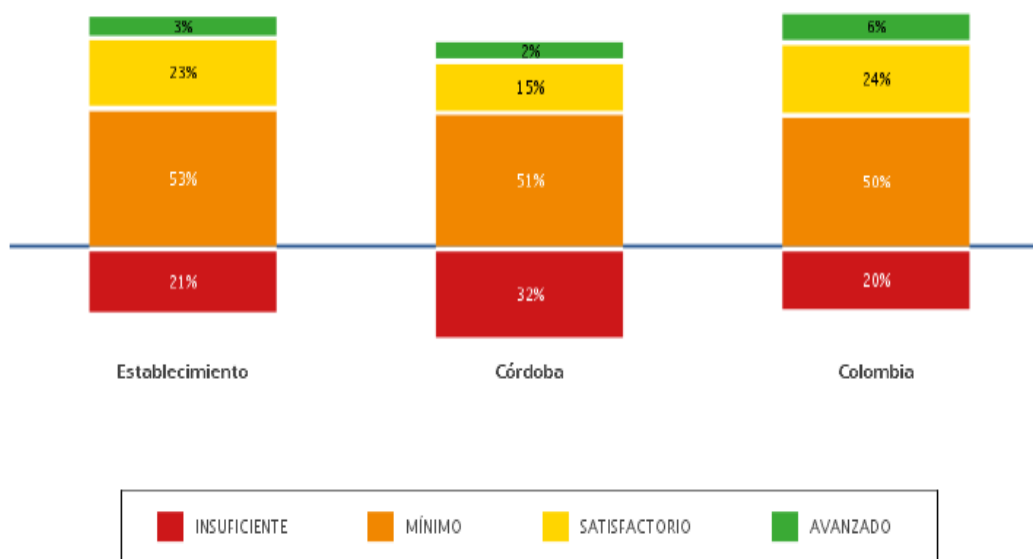


Figura 5. Porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño en el establecimiento educativo, la entidad territorial certificada (ETC) correspondiente y el país. Matemáticas, noveno grado.

Fuente: Resultados ICFES, 2016b.

Por otro lado, se ha observado que el estudiante de básica secundaria de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario (NUSERO), no asimila la matemática como una

herramienta fundamental, para la interpretación de información en cualquier área del conocimiento; presenta falencias en la comprensión, análisis e interpretación de problemas, elección adecuada de operaciones para resolver los problemas, seguimiento de patrones y secuencias lógicas, lectura de gráficos u otras representaciones visuales, relacionar conceptos con el entorno que le rodea, cálculo mental y recuperación de datos de la memoria.

De igual modo, se ha percibido que los estudiantes de grado noveno de NUSERO, asumen la matemática solamente como un área que trabaja con números y que para ellos no es del todo agradable, desconociendo las bondades de la misma. Sin embargo, los docentes preocupados por hacer que éstos desarrollen sus pensamientos lógico y matemático, emplean nuevas estrategias metodológicas en el aula; pero no hay registro alguno en la institución que verifique procesos investigativos con base a esta problemática.

Por otra parte, los docentes manifiestan la falta de capacitación en la implementación de estrategias didácticas, que ayuden a disminuir las falencias en cuanto a la metodología usada; algunos muestran resistencia a los cambios metodológicos y utilizan estrategias de evaluación inadecuadas. De lo anterior, se puede inferir la no apropiación del área por parte de los docentes.

Además, los padres de familia y/o acudientes por su parte, en la mayoría de los casos muestran poco interés en el bienestar académico y formativo de los estudiantes, no realizan el adecuado acompañamiento, algunos no cuentan con los recursos económicos necesarios y otros se encuentran en condición de analfabetismo.

Así mismo, la institución educativa escasamente aporta los recursos didácticos para el área, con dificultades realiza acompañamiento en el aula, falta comunicación y liderazgo. Esta falta de sostenibilidad, en relación con el acompañamiento y con un plan para implementar recursos didácticos novedosos en la institución, ocasiona que los contenidos

curriculares estén difícilmente articulados, actualizados o que sean muy extensos para un período escolar.

Todo lo anterior, se ve reflejado en los resultados obtenidos por los estudiantes del NUSERO, en las pruebas saber 9° año 2016 (Ver Figura 6). En los que se evidencian, que un 21% de los estudiantes evaluados, se encuentra en nivel insuficiente en las competencias matemáticas; un 53% en nivel mínimo; un 23% en nivel satisfactorio y solo un 3% de los estudiantes en nivel avanzado, lo que indica que el 74% de los estudiantes no manejan de forma satisfactoria las competencias matemáticas requeridas. (ICFES, 2016b)

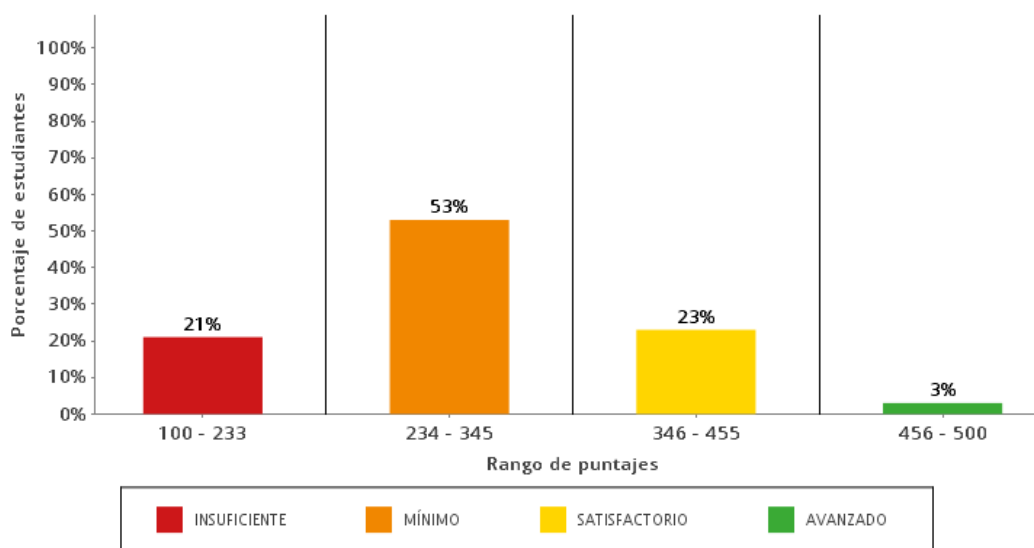


Figura 6. Porcentaje de estudiantes según niveles de desempeño en matemáticas, noveno grado.

Fuente: Resultados (ICFES, 2016b).

En cuanto a los componentes evaluados en comparación con los establecimientos que presentan un puntaje promedio similar en el área y grado evaluado (Ver Figura 7), la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario es: muy fuerte en el componente Numérico-variacional, débil en el componente Geométrico-métrico y débil en el componente Aleatorio. (ICFES, 2016b)

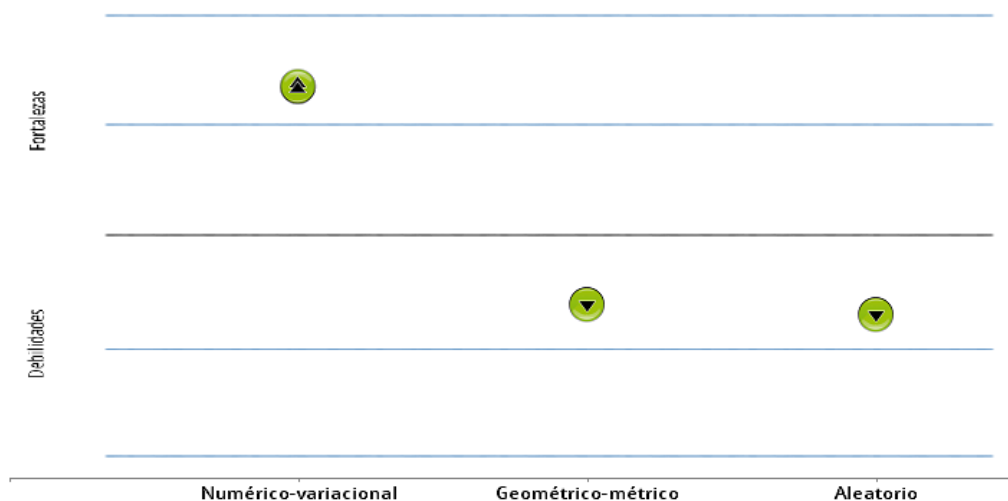


Figura 7. Componentes evaluados en matemáticas, noveno grado.

Fuente: Resultados (ICFES, 2016b).

Analizando las Fortalezas y debilidades en las competencias y componentes evaluados en comparación con los establecimientos que presentan un puntaje promedio similar en el área y grado evaluado, la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario es: Similar en razonamiento y argumentación, Fuerte en comunicación, representación y modelación y Muy Débil en planteamiento y resolución de problemas como se muestra en la Figura 8.



Figura 8. Competencias evaluadas, noveno grado.

Fuente: Resultados ICFES, pruebas saber 2016.

Desde hace ocho años los docentes del NUSERO desde su práctica docente en el área de matemáticas, han percibido en las dinámicas de relación en la clase, que los educandos son

individualistas, difícilmente trabajan en grupo, algunos sobresalen en el área y varios de estos tienen dotes de líder; a veces se ha podido propiciar que estos líderes, sean las cabezas de grupos que trabajen con determinado tipo de tarea. Se ha percibido que, con el trabajo en conjunto, hay una ligera variación en el comportamiento del grupo, se produce una mejora sustancial y se logra un aprendizaje significativo, pero todo esto se ha hecho de manera asistemática; por lo tanto, estudiar en profundidad el valor de la estrategia de aprendizaje colaborativo (EAC) de las dinámicas interactivas en el aula es un buen asunto de investigación. De igual modo, la dinámica de trabajo en el aula ha venido mostrando que los docentes también son individualistas, se les dificulta interactuar con sus compañeros, trabajan de forma aislada y reflejan ese individualismo entre sus alumnos.

Como resultado, la EAC conducirá a un aprendizaje más profundo, al pensamiento crítico y a la comprensión compartida (Garrison, Anderson & Archer, 2001; Johnson & Johnson, 1999). Johnson & Johnson, Keen, Kirschner van Vilsteren, Hummel, y Wigman (como se citó en Estrada y Atuesta, SA, SP) afirman que la EAC también proporcionará oportunidad para adquirir habilidades comunicativas, actitudes positivas hacia la construcción del conocimiento y utilización de los contenidos, que se enmarcan claramente en las relaciones sociales, cohesión del grupo y permitan el desarrollo de capacidades como reconocer y definir nuevos problemas o dar solución a ellos.

Prescott (como se citó en Estrada y Atuesta, SA, SP) manifiesta que la EAC, busca propiciar espacios en los cuales se dé el desarrollo de habilidades individuales y grupales, a partir de la discusión entre los estudiantes al momento de explorar nuevos conceptos, siendo cada quien responsable de su propio aprendizaje. Se busca que estos ambientes sean ricos en posibilidades y, más que simples organizadores de la información, propicien el crecimiento del grupo.

Así mismo, permitirá la organización del aprendizaje, el trabajo en equipo y el fomento de la cooperación entre estudiantes, lo cual no excluye momentos de competición sana y leal entre ellos o con otros cursos, grados e instituciones (MEN, 2006).

1.2 Formulación del problema

Los indicadores del problema expuesto anteriormente permiten conformar el siguiente interrogante de investigación:

¿Cuál es la influencia del aprendizaje colaborativo mediado por un ambiente de liderazgo, en el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de media académica?

1.3 Justificación de la investigación

Según Segura y Chacón (1996) “los sistemas tradicionales de enseñanza en la educación no dan al estudiante herramientas para indagar, analizar y discernir la información, que lo lleve a la verdadera toma de decisiones” (p.29). Esencialmente, lo que se entiende con esto desde la perspectiva de este estudio, es que los sistemas tradicionales de enseñanza y evaluación, enfatizan más en la reproducción de contenidos, entrenamiento y memorización sin sentido, pero no se pone en evidencia la comprensión y el desarrollo del pensamiento; por tal motivo, los conocimientos impartidos son más bien memorísticos y no promueven la creatividad, la iniciativa, ni la capacidad para comunicarse efectivamente en los diferentes medios.

Los docentes que utilizan la metodología tradicional no les parece relevante evaluar un aprendizaje significativo y duradero en los educandos; otros por el contrario, se muestran sensibles en términos epistemológicos ante la importancia de su enseñabilidad, dándole sentido y verdadero valor al aprendizaje.

Es por esto, que la metodología de aprendizaje colaborativo mediado por un ambiente de liderazgo, podría ser una alternativa que permita al estudiante aprender en forma comprensiva; al mismo tiempo que, fomente una actitud positiva respecto a las matemáticas; de ahí que, los educandos puedan percibir la importancia y utilidad del área para alcanzar sus metas.

La EAC fortalecería el aprendizaje de las matemáticas, desarrollando en los educandos de grado décimo del NUSERO, habilidades para la comprensión y el desarrollo del pensamiento; promoviendo la creatividad, la iniciativa, la capacidad de comunicarse en los diferentes medios y favoreciendo la democracia, la equidad, la diversidad y la justicia social.

Esta investigación tiene como propósito implementar la EAC con el fin de facilitar el estudio de las matemáticas, obtener un aprendizaje no sólo significativo sino duradero, disminuir el alto porcentaje de estudiantes que reprueban el área de matemáticas, lograr un aumento en el puntaje obtenido por los estudiantes en las pruebas saber, y por ende, contribuir a la mejora de los puntajes obtenidos por la institución en los índices sintéticos de calidad.

La investigación se enmarca dentro de la línea denominada: Contexto Educativo, Mediación Cognitiva, Pedagógica y Tecnológica, y está asociada al grupo de investigación: (CYMTED-L).

La investigación es una propuesta innovadora, dado que, se utiliza la estrategia de aprendizaje colaborativo mediado por ambientes de liderazgo, para el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de media académica, y permite la mediación pedagógica a través de las TIC.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Determinar la influencia del aprendizaje colaborativo mediado por un ambiente de liderazgo, en el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de media académica

1.4.2 Objetivos específicos

- Diagnosticar el nivel de desempeño del pensamiento matemático, medido por el componente geométrico métrico, en los estudiantes de los grupos control y experimental.
- Diagnosticar el nivel de desempeño del pensamiento matemático, medido por el componente aleatorio, en los estudiantes de los grupos control y experimental.
- Diseñar e Implementar guías didácticas utilizando la EAC mediada por un ambiente de liderazgo para evaluar el componente geométrico métrico y el componente aleatorio.
- Determinar la eficacia de la EAC mediada por un ambiente de liderazgo, en el aprendizaje del componente geométrico métrico, en los estudiantes del grupo experimental.
- Determinar la eficacia de la EAC mediada por un ambiente de liderazgo, en el aprendizaje del componente aleatorio, en los estudiantes del grupo experimental.

2. Marco de referencia

2.1 Antecedentes de la investigación

En la gestión de información sobre el objeto el presente estudio “*influencia del aprendizaje colaborativo mediado por un ambiente de liderazgo, en el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de media académica*” son pocos los trabajos sobre EAC en el aprendizaje de las matemáticas; los estudios que se han realizado tienen que ver con el aprendizaje cooperativo y siempre más enfocado hacia la enseñanza que al aprendizaje, y otros que centran la EAC mediados por las Tecnologías de información y comunicación (TIC); así mismo, se han encontrado investigaciones sobre todo en educación superior, pero no hay registros para la educación media académica.

- ✓ Desde esta perspectiva encontramos el trabajo “*Aprendizaje cooperativo en matemáticas: Un estudio intracontenido*” elaborado por Pons, González y Serrano (2008), docentes adscritos a la Facultad de Educación de la universidad de Murcia, estudian los efectos de una metodología cooperativa en el aula de matemáticas centrándose en las interacciones entre tratamiento y contenido. Los autores parten de los resultados que obtienen otros investigadores que defienden la idea de que los métodos de aprendizaje cooperativo son más efectivos en tareas complejas y, haciendo énfasis en un aula de 4º de ESO, desarrollan las actividades a partir de una metodología mixta (cooperativo-individualista), dividiendo el contenido del curso académico en tres grandes bloques. El primer bloque hace referencia a la operatividad numérica, el segundo bloque es el de álgebra y, el tercer bloque, es el de los contenidos que hace referencia explícita a esquemas operacionales formales (combinatoria, probabilidad, etc.).

Los investigadores indagan en la dificultad en el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, con el fin de analizar si existen diferencias en los efectos del aprendizaje cooperativo sobre la instrucción tradicional en función de la familiaridad y/o complejidad de la tarea y obtienen que los métodos de aprendizaje cooperativo son más efectivos en tareas complejas.

La investigación que se ubicó en el paradigma cuantitativo, permite concluir que la utilización de una metodología cooperativa posibilita una mejora sustantiva del rendimiento académico en matemáticas, cuando se comparan sus resultados con las situaciones de aprendizaje tradicional que, normalmente, se desarrollan a partir de modelos individualistas y con una mayor o menor carga de competitividad.

Los investigadores concluyen, además, que los sujetos, a lo largo de su escolarización, utilizan determinadas estrategias de aprendizaje y las aplican a bloques específicos de contenidos de una misma área (o de distintas áreas) de conocimientos. Si estas estrategias les permiten tener resultados exitosos se "enquistan" y se tornan poco menos que inamovibles, de tal manera que se integran, únicamente, como saberes procedimentales (saber hacer) y no como saberes declarativo-estructurales (comprender).

Las ventajas que genera la aplicación de un método cooperativo son, pues, evidentes. En efecto, dejando a un lado las innumerables y muy interesantes ventajas descritas desde el plano social (y que posibilitan, entre otras cosas, la integración de minorías étnicas y de sujetos afectados por deficiencias motóricas, sensoriales, psíquicas, etc.), desde una perspectiva eminentemente cognitiva estas ventajas no son menos interesantes.

Este estudio le aporta al proyecto la metodología, estrategias, técnicas e instrumentos de investigación porque en semejanza a la EAC hace énfasis en el trabajo en equipo y los resultados confirman que las diferencias en rendimiento, son siempre a favor de la cooperación sin dejar a un lado los contenidos novedosos y complejos incluso cuando estos contenidos estén directamente vinculados a los instrumentos cognitivos (esquemas) del sujeto.

La revisión de literatura sobre el objeto de estudio de la anterior investigación facilitó la comprensión del fenómeno a estudiar, la técnica POL, la metodología y estrategias a

desarrollar, al mismo tiempo que se tiene en cuenta las recomendaciones de la autora para la investigación.

- ✓ Zañartu (2011) en su artículo “*Aprendizaje colaborativo: una nueva forma de Diálogo Interpersonal y en Red*” busca mostrar que el aprendizaje colaborativo, está centrado básicamente en el diálogo, la negociación, en la palabra, en el aprender por explicación y que el aprendizaje en red es constitutivamente un entorno “conversacional”.

Afirma que las parejas no aprenden porque están de a dos, sino porque ellas realizan algunas actividades que estimulan algunos mecanismos de aprendizaje específicos; es decir, la interacción entre sujetos genera actividades extras, explicaciones, desacuerdos, regulación mutua, que despiertan mecanismos cognitivos adicionales, internalización, extracción, conocimiento que son en definitiva a través de los cuales aprendemos.

Menciona entre las características del aprender colaborativamente que las relaciones colaborativas de aprendizaje tienen que ver con: a) La interactividad. Dado que no puede haber aprendizaje colaborativo sin la interacción entre partes, se aprende de la reflexión común, del intercambio de ideas, del analizar entre dos y más un tema en común, a través de lo cual se obtiene un resultado enriquecido; b) La sincronía de la interacción. No es posible generar conocimiento sin respuestas inmediatas, porque provocaría desmotivación, y descontextualización en una de las partes; c) La negociación básicamente es un proceso, es un elemento distintivo de las interacciones colaborativas, y tiene especial importancia cuando se trata de negociar significados.

Concluye que en el aprendizaje colaborativo se produce un alto nivel de éxito entre los estudiantes por el proceso cognitivo que ocurre durante el aprendizaje, cimentado básicamente por el diálogo, por la expansión de las capacidades conceptuales y por el alto nivel de interacción. Además, en el aprendizaje colaborativo se estimula la iniciativa individual, los integrantes del grupo participan con sus habilidades en la toma de decisiones, a la vez que se despierta la motivación de todos los miembros del grupo favoreciendo una mejor productividad.

La revisión de literatura sobre el objeto de estudio de la anterior investigación facilitó la comprensión del aprendizaje colaborativo y su adecuada utilización dentro del aula para propiciar ambientes de colaboración.

- ✓ Para determinar cómo impacta la técnica de aprendizaje orientada en proyectos (POL), en el mejoramiento de las competencias matemáticas: planteamiento y resolución de problemas, comunicación y argumentación; los investigadores Arreguín, Alfaro y Ramírez (2012) en su artículo “*Desarrollo de competencias matemáticas en secundaria usando la técnica de aprendizaje orientado en proyectos*” utilizan el método cualitativo con un diseño de estudio de caso múltiple, en una escuela pública de San Luis Potosí, México.

La investigación giró en torno a la pregunta ¿Cómo un diseño instruccional innovador basado en la técnica POL favorece el desarrollo de tres competencias matemáticas (planteamiento y resolución de problemas, comunicación y argumentación) mejorando con ello los aprendizajes matemáticos en estudiantes de segundo grado de educación secundaria? Estudió las categorías de análisis: *planteamiento y resolución de problemas, argumentación, comunicación*; que midieron la identificación de problemas, planteamiento, resolución, explicación, justificación, demostración, expresión oral y escrita; y *la técnica POL* que permitió la organización del aprendizaje, ejecución de la técnica y la evaluación.

La metodología utilizada consistió en que a partir de las orientaciones del docente sobre el objetivo, roles de los participantes, explicación detallada de cada uno de los pasos de la técnica POL, las actividades que contempla cada una de ellas, los alumnos constituidos en equipos de cuatro integrantes emprenden el desarrollo de un proyecto, implicando la organización, la distribución de roles, responsabilidad compartida y el análisis de diversas fuentes de información para resolver el problema. Los alumnos de manera colaborativa desarrollan un proyecto de su interés y el proceso enseñanza aprendizaje es guiado mediante la utilización del diseño instruccional innovador.

Los hallazgos del estudio muestran el desarrollo de las competencias matemáticas para el planteamiento y resolución de problemas, la comunicación y argumentación a través de la implementación de la técnica POL, como diseño instruccional innovador, además de la influencia positiva de la técnica POL, las competencias matemáticas de los estudiantes se desarrollaron al resolver problemas de su interés y contexto, poniendo en juego un conjunto de capacidades como identificar, plantear y resolver problemas; explicando, justificando y demostrando, es decir, argumentando sus razonamientos; comunicando sus ideas de manera oral y por escrito sobre los resultados en la ejecución de proyectos basados en situaciones reales; identificando de manera autónoma situaciones problemáticas; planteando problemas anclados en ámbitos y situaciones familiares, sociales y académicas, así como su traducción al lenguaje y contexto matemático e interdisciplinario; resolviendo problemas con procedimientos oportunos y pertinentes; discutiendo alternativas para la selección de estrategias de resolución; poniendo a prueba sus ideas y escuchando las soluciones de los demás, siendo recomendable su aplicación en la educación secundaria.

Resultado de una reflexión y análisis de la experiencia adquirida en esta investigación emergen las recomendaciones siguientes que pudieran ser consideradas por el personal docente y directivo de la institución donde se llevó a cabo, así como a los posibles interesados en la temática en estudios posteriores.

- Focalizar el estudio en una sola competencia matemática como punto de partida para emprender búsquedas y hallazgos más profundos y contrastar los resultados con esta experiencia de investigación, observando y evaluando a los alumnos en situaciones de aprendizaje, desde un enfoque formativo, vinculando la valoración de procesos y productos que orienten un análisis didáctico más fino con el propósito de identificar los recursos cognitivos (conocimientos, habilidades y valores) movilizados.
- Se requiere que el docente asuma un papel como investigador de su práctica, fomente en los alumnos la autoconfianza, la seguridad, la disposición al riesgo, la

autoevaluación reflexiva y crítica, apoyar en la organización del trabajo en grupo, observar y desarrollar en los estudiantes habilidades sociales, intervenir cuando sea estrictamente necesario, centrando la participación con preguntas encaminadas a reflexionar tareas específicas, en donde los estudiantes tengan oportunidades de plantear, explorar y resolver problemas, enseñar a reconocer situaciones para la aplicación de conocimientos matemáticos e interdisciplinarios, centrando la atención en los procesos que los alumnos adoptan ante determinadas situaciones y cómo convencen a otros de la veracidad de afirmaciones mediante diversos procedimientos y pruebas.

- Enriquecer y adaptar los criterios de evaluación considerados en este trabajo, para valorar el desempeño y el desarrollo de competencias matemáticas de los alumnos que permita observar y demostrar en el proceso formativo el grado en que se han logrado, siendo recomendable identificar líneas de progreso que contribuyan al desarrollo de competencias matemáticas suficientemente claras, algunas de ellas: de resolver con ayuda a resolver de manera autónoma; de los procedimientos formales a los procedimientos expertos; y de la justificación pragmática a la justificación axiomática.
- ✓ Apoyando la conclusión de que el liderazgo contribuye al aprendizaje mediante el desarrollo de un conjunto de procesos estructurales y socioculturales que definen la capacidad de la escuela para la mejora académica y describen los resultados de estudios relacionados entre sí, en los cuales han tratado de entender cómo el liderazgo contribuye a la capacidad de la escuela para la mejora y el aprendizaje de los estudiantes, se encontró del artículo de Hallinger y Heck (2014) titulado “*Liderazgo colaborativo y mejora escolar: Comprendiendo el impacto sobre la capacidad de la escuela y el aprendizaje de los estudiantes*”.

En esta investigación se describen las percepciones de liderazgo colaborativo y la capacidad de mejora de la escuela, estudiantes y profesores, al mismo tiempo que, el rendimiento de los estudiantes en matemáticas y lectura.

En el artículo se considera al liderazgo colaborativo centrado en las acciones estratégicas de toda la escuela y que se comparten entre el director, docentes, administradores y otros miembros de la comunidad; y que se enfocan hacia la mejora de la escuela.

La investigación tuvo como propósito, buscar una visión de cómo el liderazgo escolar colaborativo contribuía a la mejora de la escuela, y permitió concluir que el liderazgo y la mejora en la escuela actúan como un proceso de influencia mutua; de igual modo, las condiciones iniciales de la organización relacionadas con los cambios de liderazgo colaborativo, influyen directamente en los cambios posteriores observados en la capacidad de mejora y aumento del rendimiento académico y el aprendizaje de los estudiantes.

La investigación sugiere que los estilos y estrategias de liderazgo eficaces están altamente contextualizados, por lo que cada escuela necesita un liderazgo diferente para que sus resultados sean eficaces.

La anterior investigación facilitó en la revisión sobre el objeto de estudio, la comprensión de cómo el liderazgo está asociado con el aprendizaje de los estudiantes y la mejora del rendimiento académico en la escuela.

- ✓ Por otro lado, Pano (2015) en su tesis de grado titulada “*Una forma diferente de enseñar ciencias, a través del aprendizaje cooperativo en Primaria*”, en Barbastro, ciudad de España, muestra como el aprendizaje está unido a la formación del trabajo en grupos cooperativos y cómo el aprendizaje activo es mucho mayor cuando unos alumnos enseñan a otros y el docente actúa como guía. Afirma también, que los miembros de los equipos cooperativos presentan una interdependencia y se consideran responsables tanto de su propio aprendizaje como del de los demás y al mismo tiempo, desarrollan sus habilidades sociales y mejoran su expresión oral al tener que entenderse y llegar a acuerdos.

Así mismo, declara que el problema en el aprendizaje radica en que algunos docentes con formación disciplinar les cuesta aceptar una propuesta integradora, y cambiar su metodología a la hora de enseñar.

Pano (2015), desarrolla una propuesta que integra el trabajo cooperativo con el aprendizaje significativo y demuestra que esta estrategia es más eficaz para el aprendizaje, que la metodología tradicional individualista.

- ✓ *“El aprendizaje colaborativo: una vía para la educación de postgrado”* autoría de Bernaza y Lee (SA), asesores técnico docentes de la dirección de postgrado del Ministerio de Educación Superior en Cuba, compara los resultados de la forma de trabajo con aprendizaje colaborativo (AC) y los modelos de aprendizaje tradicionales; en donde encuentra que, los estudiantes aprenden más cuando utilizan el AC, puesto que, recuerdan por más tiempo el contenido, desarrollan habilidades de razonamiento superior y de pensamiento crítico, se sienten más confiados y aceptados por ellos mismos y por los demás.

El artículo tiene como objetivo, resumir las experiencias de varios autores que han trabajado aprendizaje colaborativo, incluidas sus propias experiencias. Afirma que cada estudiante es responsable de manera individual de la parte de tarea que le corresponde. Los miembros del grupo establecen las metas, evalúan periódicamente sus actividades e identifican los cambios que deben realizarse para mejorar su trabajo en el futuro. Así mismo, cada estudiante se evalúa a partir de sus avances, y de su avance depende el de los demás.

En forma grupal los estudiantes deben aprender a negociar, criticar, dialogar, tomar decisiones en conjunto, respetar las opiniones de los demás, cumplir las normas de trabajo grupal, asumir posiciones éticas y de responsabilidad social, entre otras. Debe existir igualdad de oportunidades, es decir, todos los integrantes del grupo deben tener las mismas posibilidades de acceso a materiales y recursos para llevar a cabo con eficacia el trabajo individual; el conocimiento es compartido entre todos por igual.

Concluye que: AC es un proceso de construcción social en el que cada individuo aprende más de lo que aprendería por sí mismo, debido a la interacción con otros miembros de su grupo; exige tener en cuenta la formación de los grupos, el encuadre, el diagnóstico previo, la orientación para el trabajo individual previo y el trabajo grupal, la presentación del resultado común y la evaluación.

- ✓ En la revisión de literatura a nivel nacional, se encontró el artículo titulado *¿Se puede organizar la clase de matemáticas a través de un trabajo colaborativo y a su vez abordar la resolución de problemas como método de enseñanza- aprendizaje de un concepto matemático?*, autoría de Bustos (SA), donde afirma que el trabajo colaborativo como estrategia de enseñanza- aprendizaje de las matemáticas, brinda herramientas que van más allá de la conformación de grupos colaborativos; pues, en dicho trabajo colaborativo también se asignan roles, se buscan objetivos, se implementan recursos didácticos, se ejecutan tareas y todo esto contribuye en gran medida tanto a los profesores como a los alumnos, logrando que se dé una clase atractiva y colaborativa.

Además, ratifica que el trabajo colaborativo contribuye en la enseñanza - aprendizaje de un concepto matemático y en la resolución de problemas, dado que, el estar en grupos de trabajo colaborativo, permite que, los alumnos construyan el conocimiento de manera significativa y autónoma, mediante una ayuda que exige de cada alumno, una responsabilidad que determina el éxito del trabajo matemático; es decir, la comprensión de un conocimiento matemático.

Concluye que la clase de matemáticas se puede reorganizar a través de un trabajo colaborativo y a la vez abordar la resolución de problemas como método de enseñanza – aprendizaje de un concepto matemático.

- ✓ La investigación realizada por Ortiz (2015) en su tesis de grado titulada *“Proyectos Colaborativos para el desarrollo del pensamiento numérico en básica primaria”* aborda los conceptos de aprendizaje y proyectos colaborativos, y su aplicación apoyada en TIC, que sustentan el diseño e implementación de un proyecto colaborativo para aportar al

desarrollo de competencias del pensamiento numérico a partir de situaciones cotidianas para estudiantes de quinto grado.

Dentro de las conclusiones arrojadas por el trabajo de investigación, los alumnos mostraron mejora en su desempeño, en la aplicación de fórmulas y en la solución de problemas cotidianos, lo que permitió deducir que los alumnos no abordan problemas dentro del escenario común de enseñanza, debido a que no encuentran esquemas reales de interpretación y necesidad para ellos, ya que la matemática se concibe por ellos (idea que se refuerza en la práctica escolar) como un saber ajeno a la realidad, y cuyas respuestas no encuentran sentido en su vida cotidiana.

De igual forma se comprobó que el desarrollo de competencias se potencia con el trabajo colaborativo, puesto que, a nivel de operaciones matemáticas, se logró un avance en la identificación de las operaciones que los alumnos alcanzaron en cada ejercicio, más cuando ésta se refiere a un problema cotidiano.

Por otro lado, se observó que al usar herramientas colaborativas y problemas cotidianos se mejoró el empleo del tiempo por parte de los estudiantes.

Por parte, la maestra consiguió contemplar la enseñanza de las matemáticas desde otro sentido, dado que, logró una elaboración más refinada de los problemas -situaciones cotidianas-, permitiéndole mejoría un labor diaria y cambios en la práctica pedagógica.

Esta investigación, permitió ratificar que la utilización de aprendizaje colaborativo para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas aumentan el rendimiento académico de los estudiantes, al mismo tiempo, que mejoran sus relaciones interpersonales y el uso adecuado del tiempo en el aula.

- ✓ Cárdenas, Ceballos y Cohen (2017) en su artículo *“Aprendizaje colaborativo en estudiantes de básica secundaria en Colombia”* afirma que el aprendizaje colaborativo implementado en estudiantes de educación básica secundaria es una estrategia vanguardista para la construcción de aprendizajes en estudiantes de educación básica

secundaria en Colombia y pretende discernir conceptualmente acerca de este aspecto de la educación entorno a sus elementos y sus ventajas.

La metodología de este artículo se basó en el análisis de contenido de la literatura asumida por el marco teórico de la tesis doctoral del autor y permitió realizar algunas reflexiones sobre el aprendizaje colaborativo mostradas a continuación:

- El aprendizaje colaborativo es muy importante en todos los ámbitos desde una empresa, como en la escuela o en la misma casa, ya que, al ponerlo en marcha, podemos obtener mejores resultados y con esto alcanzar los objetivos planteados de la manera correcta.
- No es lo mismo que una sola persona trabaje o se enfoque en algo y enfocarse únicamente a lo que él desea o piensa; a reunir distintas ideas o puntos de vista de diferentes colaboradores, lo que también puede llevarnos a realizar un trabajo más creativo, efectivo e incluso, original.
- El trabajar colaborativamente puede ayudar personalmente a tener relaciones interpersonales con otras personas a aprender a convivir.
- El aprendizaje activo que se desarrolla en una colectividad no competitiva, en la cual todos los miembros del grupo colaboran en la construcción del conocimiento y contribuyen al aprendizaje de todos.
- Los alumnos asumen roles desde múltiples perspectivas que representan diferentes pensamientos, ideas y el conocimiento se aprende en contextos reales para ser aplicado en situaciones cotidianas y siempre se apunta, a que haya que tomar una decisión, a optar por una solución, a crear una propuesta diferente de las que ya existen, aportando algo nuevo a cada situación.

La revisión de literatura de esta investigación permitió entender, cómo se desarrolla el aprendizaje colaborativo en estudiantes y las ventajas de su aplicación para mejorar su rendimiento académico, social y personal.

- ✓ Pérez (2017) en su tesis de pregrado ***“La colaboración como mediación en el aprendizaje de las matemáticas”*** buscó incentivar y desarrollar en los estudiantes de dos escuelas al sur de Bogotá D.C, el trabajo colaborativo.

La investigación estuvo orientada a establecer estrategias que permitieran el aprendizaje colaborativo en matemáticas y logró generar identidad profesional alrededor de los procesos para potenciar el aprendizaje colaborativo en los estudiantes a través de la reflexión de la formación docente, reivindicando su responsabilidad social.

Las reflexiones realizadas permitieron evidenciar que a mayor motivación ocurre mayor colaboración y esto se ve reflejado en un mayor rendimiento académico y aprendizaje en los estudiantes.

Además, se identificó como función fundamental del profesor, gestionar una comunicación efectiva entre los estudiantes. Para esto, el profesor debe afrontar tres desafíos: Incentivar la búsqueda de sentido a las matemáticas, motivar al estudiante a elaborar aportes y crear equipos.

En esta investigación se demuestra que propiciar ambientes de colaboración entre los estudiantes, permite disminuir el individualismo y potenciar el aprendizaje de las matemáticas.

- ✓ Por otro lado, a nivel regional se encontró el artículo ***“desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele y su relación con los estilos de aprendizaje”*** Fuentes, Portillo y Robles (2015), cuyo objetivo fue evaluar la eficacia del modelo de Van Hiele en el avance en los niveles de razonamiento geométrico de los estudiantes y su relación con los estilos de aprendizaje. El estudio abordado desde el

enfoque cuantitativo con diseño cuasi-experimental destaca las mejoras significativas de los estudiantes en cuanto a los grados de adquisición de Van Hiele, después de ser intervenidos con la secuencia didáctica.

Concluye que el modelo fue eficaz para la mayoría de los estudiantes dado que no se encontraron diferencias significativas entre los estilos de aprendizaje y la mejora en los niveles de razonamiento.

- ✓ De igual forma, la tesis de grado de la SUE Caribe titulada “*Estrategias metacognitivas para el desarrollo de competencias genéricas en la resolución de problemas matemáticos de tipo numérico variacional en estudiantes de grado noveno*”, de autoría de Díaz y Palomino (2016); con el propósito de evaluar las implicaciones que tiene un plan de intervención que favorece el uso de estrategias metacognitivas; en el desarrollo de competencias genéricas de las matemáticas en los estudiantes, implementa un estudio con enfoque cuantitativo y diseño cuasi-experimental, que le permitió concluir entre otras que: las estrategias metacognitivas producen mejoras en los procesos de enseñanza de competencias genéricas para la solución de situaciones problema de las matemáticas; la organización sistemática del proceso de aprendizaje basado en enseñar a pensar a partir de: la instrucción directa en metacognición, modelado metacognitivo desde la disciplina, la pregunta metacognitiva y el trabajo cooperativo influye de manera positiva en la resolución de problemas matemáticos de razonamiento cuantitativo.

La anterior investigación ayuda a entender cómo diversas estrategias acompañadas de un trabajo cooperativo influyen de manera positiva en el aprendizaje de los estudiantes.

- ✓ En estudios más recientes se encuentra la tesis de grado de Sáenz y Patiño (2017) titulada “*La resolución de problemas desde el modelo de George Polya, como estrategia didáctica para desarrollar el pensamiento geométrico en los estudiantes de grado 5° de la Institución Educativa Villa Cielo de Montería*”. De enfoque cuantitativo y diseño cuasi-experimental con el propósito de determinar la eficacia de la resolución de problemas desde el modelo de Polya, en el desarrollo de las competencias de

razonamiento, comunicación y resolución de problemas en el pensamiento geométrico, permitió concluir que: con la ayuda de la estrategia resolución de problemas según el modelo de George Polya y el trabajo cooperativo se pudo comprender la dinámica del grupo en el salón de clase y hacer mejoras en la implementación de las estrategias didácticas; reflexionar en torno a los procesos trabajados en el aula desde el rol que desempeña cada uno; mejorar las habilidades y competencias del pensamiento geométrico en los estudiantes.

La anterior investigación facilitó en la revisión sobre el objeto de estudio, la comprensión del aprendizaje cooperativo y su adecuada utilización dentro del aula para mejorar el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes.

- ✓ Además, se encontró la tesis de grado de Pacheco y Reyes (2018) titulada “*Escenarios lúdicos para el desarrollo del pensamiento numérico variacional en estudiantes de séptimo grado de las Instituciones Educativas San Isidro Y Caño Viejo Palotal*” de la SUE Caribe, la cual desarrolla escenarios lúdicos mediados por TIC, para el mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas, más específicamente en el pensamiento numérico variacional. Esta investigación de enfoque cuantitativo, con diseño cuasi-experimental, permitió concluir que las instituciones educativas en estudio mostraron avances en cuanto a los niveles de desempeño del pensamiento numérico variacional; así mismo, que los recursos didácticos pueden ser materiales apropiados para la enseñanza, y que, además, el docente debe reconocer cuales de éstos utilizar para alcanzar el mejoramiento del desarrollo de las competencias matemáticas.

Finalmente, la estrategia de escenarios lúdicos mediados por TIC, mostró resultados positivos en cuanto a: desarrollo de competencias de interés, exposición del estudiante frente a un juego mediado por TIC, acercamiento entre docente y estudiante.

Se debe agregar que, la investigación permitió mostrar que en las instituciones educativas se requiere de planes de formación docente en herramienta tecnológicas y su inmersión en el aula.

La revisión de literatura sobre el objeto de estudio de la anterior investigación facilitó la comprensión de la metodología y estrategias a desarrollar.

2.2 Marco teórico conceptual

Las matemáticas han tenido una creciente importancia en la sociedad a través de los tiempos, debido al sinnúmero de aplicaciones que ha tenido desde la antigüedad en la física, astronomía, entre otras; y hoy día mayormente utilizada en la tecnología, la informática, las telecomunicaciones y métodos audiovisuales.

Gómez-Chacón, I. M^a. (2010) afirma en su estudio que, desde hace bastante tiempo, las actitudes hacia la matemática han sido un punto central en las investigaciones sobre aspectos de género en el aprendizaje de las matemáticas (Fennema y Sherman, 1976; Forgasz y Leder, 1996), constatándose que es un factor clave en las diferencias observadas en el rendimiento entre los estudiantes.

Estudios realizados muestran, además, la apatía que los estudiantes sienten al momento de aprender matemáticas. El aprendizaje de la matemática se ha convertido para los estudiantes en un problema donde es difícil el análisis e interpretación y desarrollo de ejercicios.

La apatía no es un fenómeno estático para ser estudiado en una habitación; tiene un destino dinámico: nace, se desarrolla, lleva al desinterés, el desinterés engendra al aburrimiento y éste muestra muchas caras: la pasividad, la inercia, la tristeza e incluso algo muy nuestro (Prado et al 2013, p.1).

Por ejemplo, en Panamá el problema de la apatía a las matemáticas ha ido aumentando considerablemente cada año y por ende la deserción escolar en esta área.

Valentini (SA) afirma que:

Cuanto más valorado y aceptado se sienta el alumno más le ayudará a avanzar en sus aprendizajes. Si el docente logra tener una relación auténtica y transparente,

de cálida aceptación, de valoración como persona diferente, donde vea al alumno tal cual es, probablemente esto ayude al alumno a experimentar y a comprender aspectos de sí mismo, a emprender y enfrentar mejor los problemas (p.6).

Según estudios realizados por Collazos, Guerrero y Vergara (2001), el aprendizaje colaborativo es el uso instruccional de pequeños grupos de tal forma que los estudiantes trabajen juntos para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás. Este tipo de aprendizaje no se opone al trabajo individual, ya que puede observarse como una estrategia de aprendizaje complementaria que fortalece el desarrollo global del alumno.

Los métodos de aprendizaje colaborativo, comparten la idea de que los estudiantes trabajan juntos para aprender y son responsables del aprendizaje de sus compañeros tanto como del suyo propio, es decir, trabajan colaborando. Dentro del aprendizaje colaborativo cada miembro es responsable de su aprendizaje; pero al mismo tiempo de los demás integrantes de su equipo, sus elementos básicos, la interdependencia positiva, la interacción, la contribución individual y las habilidades personales y de grupo (Vásquez, 2012).

En un proceso de aprendizaje colaborativo, las partes se comprometen a aprender algo juntos, lo que debe ser aprendido sólo puede conseguirse si el trabajo del grupo es realizado en colaboración. Es el grupo el que decide cómo realizar la tarea, qué procedimientos adoptar, cómo dividir el trabajo y las tareas a realizar; por tanto, la comunicación y la negociación son claves en este proceso (Vásquez, 2012).

Expertos en aprendizaje cooperativo Johnson, Johnson y Holubec (1999) afirman:

Aprender es algo que los alumnos hacen, y no algo que se les hace a ellos. El aprendizaje no es un encuentro deportivo al que uno puede asistir como espectador. Requiere la participación directa y activa de los estudiantes. Al igual que los alpinistas, los alumnos escalan más fácilmente las cimas del aprendizaje cuando lo hacen formando parte de un equipo cooperativo (p.3).

Según (Vásquez, 2012) para que exista un verdadero aprendizaje colaborativo, no sólo se requiere trabajar juntos, sino cooperar en el logro de una meta que no se puede lograr individualmente. Y señalan que son cinco los elementos que caracterizan el aprendizaje colaborativo:

1. Responsabilidad individual: todos los miembros son responsables de su desempeño individual dentro del grupo, y al mismo tiempo, todos en el equipo deben comprender todas las tareas que les corresponden a los compañeros.

2. Interdependencia positiva: los miembros del grupo deben depender los unos de los otros para lograr la meta común.

3. Habilidades de colaboración: las habilidades necesarias para que el grupo funcione en forma efectiva, como el trabajo en equipo, liderazgo y solución de conflictos.

4. Interacción promotora: los miembros del grupo interactúan para desarrollar relaciones interpersonales y establecer estrategias efectivas de aprendizaje, para lograr pensamientos y resultados de mayor calidad.

5. Proceso de grupo: el grupo reflexiona en forma periódica y evalúa su funcionamiento, identifican que deben realizar para mejorar su trabajo en el futuro y los cambios necesarios para incrementar su efectividad.

Como lo indica Collazos (2001), los estudiantes que estén comprometidos en el proceso de aprendizaje tienen las siguientes características:

- **Responsables por el aprendizaje:** Los estudiantes se hacen cargo de su propio aprendizaje y son autorregulados. Ellos definen los objetivos del aprendizaje y los problemas que son significativos para ellos, entienden qué actividades específicas se relacionan con sus objetivos, y usan estándares de excelencia para evaluar qué tan bien han logrado dichos objetivos.

- **Motivados por el aprendizaje:** Los estudiantes comprometidos encuentran placer y excitación en el aprendizaje. Poseen una pasión para resolver problemas y entender ideas y conceptos. Para estos estudiantes el aprendizaje es intrínsecamente motivante.

- **Colaborativos:** Los estudiantes entienden que el aprendizaje es social. Están “abiertos” a escuchar las ideas de los demás, a articularlas efectivamente, tienen empatía por los demás y tienen una mente abierta para conciliar con ideas contradictorias u opuestas. Tienen la habilidad para identificar las fortalezas de los demás.

- **Estratégicos:** Los estudiantes continuamente desarrollan y refinan el aprendizaje y las estrategias para resolver problemas. Esta capacidad para aprender a aprender (metacognición) incluye construir modelos mentales efectivos de conocimiento y de recursos, aun cuando los modelos puedan estar basados en información compleja y cambiante. Este tipo de estudiantes son capaces de aplicar y transformar el conocimiento con el fin de resolver los problemas de forma creativa y son capaces de hacer conexiones en diferentes niveles.

Para Gómez (como se citó en Bustos, SA, SP):

Cuando cada alumno de un grupo colaborativo se enfrenta a conjeturas y argumentaciones de un compañero de grupo, se ve obligado a un trabajo de descentración de sus propias explicaciones. Por otro lado, como también ha de explicar sus estrategias de resolución tiene que clarificarlas por sí mismo, lo que le lleva a darse cuenta de pasos que de otro modo no tomaría en consideración. Así el aprendizaje se vuelve más comprensivo y menos mecanizado.

Los términos de aprendizaje cooperativo, aprendizaje colaborativo, aprendizaje grupal y en ocasiones aprendizaje basado en problemas, son considerados por algunos autores como conceptos semejantes, sin embargo, diversos investigadores los consideran diferentes (Vásquez, 2012).

Zañartu (2011) en su artículo “Aprendizaje colaborativo: una nueva forma de Diálogo Interpersonal y en Red” sostiene que los conceptos de aprendizaje colaborativo y aprendizaje cooperativo son diferentes y que cada uno representa extremos del proceso de enseñanza–aprendizaje, dado que la responsabilidad en el aprendizaje colaborativo es llevada por el

estudiante, mientras que, en el cooperativo es el docente quien se hace responsable de estructurar el proceso.

A pesar de las diferencias, en ambos aprendizajes se logra una reconstrucción y ampliación de nuevos conocimientos, dado que, el estudiante logra descubrirlo y transformarlo a través de su interacción con el medio.

El aprendizaje colaborativo presenta como premisas: a) llegar al consenso a través de la cooperación entre los miembros del grupo y b) que la participación de los integrantes del grupo sea directa y exista entre ellos el compromiso y la voluntad de hacer. De tal manera que el aprendizaje colaborativo es una instancia de aprendizaje activo, que se desarrolla en una relación de consenso, pero no de negociación, de discusión, de acuerdos y no de una competencia entre sus integrantes.

Fundamentalmente, el aprendizaje colaborativo se basa en estrategias pedagógicas apoyadas con la tecnología de comunicación e informática, que generan verdaderos ambientes de aprendizaje interactivo donde el estudiante, es el responsable de su aprendizaje; mientras que, en el aprendizaje cooperativo el profesor es el que incide de manera central en la estructuración del proceso enseñanza aprendizaje. En el aprendizaje cooperativo, se da una división de tareas que, posteriormente son integradas a la consecución del objetivo; en cambio, en el aprendizaje colaborativo se comparte la responsabilidad, dándole mayor énfasis al proceso más que a la tarea, de tal forma que se construye el conocimiento a través de la colaboración grupal.

Chiavenato (2007) define el liderazgo como “influencia interpersonal ejercida en una situación, orientada a la consecución de uno o diversos objetivos específicos, mediante el proceso de comunicación humana” (p.104). El autor explica el liderazgo desde diferentes teorías, como la de relaciones humanas y rasgos de personalidad, entre otras.

Gilbert, Fiske y Lindzey (1998) (como se citó en Cárdenas ,2016, p.2), definen el liderazgo como la capacidad de ejercer control sobre un grupo u organización a través de su

influencia individual e interpersonal. Ello implica que en su rol de líder, motiva y dirige a otros a actuar de una manera determinada.

Lussier y Achua (2005) (como se citó en Cárdenas ,2016, p.2), quienes sostienen, que el liderazgo es el proceso de influencia en el que líderes y seguidores mantienen una relación de intercambio para alcanzar objetivos comunes.

Fullan, 2001; Hallinger, Bickman y Davis, 1996; Hallinger y Heck, 1996; Heck, Larson y Marcoulides, 1990; Leithwood et al., 2010; Marks y Printy, 2003; Mulford y Silins, 2009; Robinson, Lloyd y Rowe, 2008; Wiley, 2001 (como se citó en Hallinger y Heck, 2014, p.73) confirman, que la investigación empírica constata que el liderazgo escolar exitoso crea condiciones favorables que apoyan la enseñanza y el aprendizaje eficaz, y aumentan la capacidad de aprendizaje profesional y el cambio en la escuela.

Los problemas matemáticos, son dificultades de aprendizaje que se pueden encontrar en estudiantes de todos los grados, tanto en primaria como en secundaria y hasta en la universidad. Para algunos estudiantes pueden ser de tipo cognitivo, físico, mental o social, dependiendo del contexto en que se encuentre.

El pensamiento espacial, entendido como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales; contempla las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el espacio, desarrollar variadas representaciones y, a través de la coordinación entre ellas, hacer acercamientos conceptuales que favorezcan la creación y manipulación de nuevas representaciones mentales. Esto requiere del estudio de conceptos y propiedades de los objetos en el espacio físico y de los conceptos y propiedades del espacio geométrico en relación con los movimientos del propio cuerpo y las coordinaciones entre ellos y con los distintos órganos de los sentidos (MEN, 2006, p.61).

Desde esta perspectiva se rescatan, de un lado, las relaciones topológicas, en tanto reflexión sistemática de las propiedades de los cuerpos en virtud de su posición y su relación con los demás y, de otro lado, el reconocimiento y ubicación del estudiante en el espacio que lo rodea. Para el pensamiento espacial no son importantes las mediciones ni los resultados numéricos de las medidas, sino las relaciones entre los objetos involucrados en el espacio, y la ubicación y relaciones del individuo con respecto a estos objetos y a este espacio, ya no es suficiente con decir que algo está cerca o lejos de algo, sino que es necesario determinar qué tan cerca o qué tan lejos está (MEN, 2006, p.61).

Lo anterior implica relacionar el estudio de la geometría con el arte y la decoración; con el diseño y construcción de objetos artesanales y tecnológicos; con la educación física, los deportes y la danza; con la observación y reproducción de patrones (por ejemplo en las plantas, animales u otros fenómenos de la naturaleza) y con otras formas de lectura y comprensión del espacio (elaboración e interpretación de mapas, representaciones a escala de sitios o regiones en dibujos y maquetas, etc.), entre otras muchas situaciones posibles muy enriquecedoras y motivadoras para el desarrollo del pensamiento espacial (MEN, 2006, p.61).

Los conceptos y procedimientos propios del pensamiento métrico hacen referencia a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones (MEN, 2006, p.63).

Es importante destacar que la estimación de las medidas de las cantidades y la apreciación de los rangos entre los cuales puedan ubicarse esas medidas trascienden el tratamiento exclusivamente numérico de los sistemas de medidas y señalan la estimación como puente de relaciones entre las matemáticas, las demás ciencias y el mundo de la vida cotidiana, en contextos en los que no se requiere establecer una medida numérica exacta (MEN, 2006, p.63).

En lo que respecta al aprendizaje de sistemas de medida y, en particular del Sistema Internacional de unidades y medidas (SI) , es importante el reconocimiento del conjunto de unidades de medida que se utilizan para cada una de las diferentes magnitudes (la velocidad, la densidad, la temperatura, etc., y no sólo de las magnitudes más relacionadas con la geometría: la longitud, el área, el volumen y la amplitud angular). El estudio de esas primeras magnitudes muestra que el pensamiento métrico no se limita a las matemáticas, sino que se extiende también a las ciencias naturales y sociales (MEN, 2006, p.64).

El pensamiento métrico está estrechamente relacionado con las disciplinas científicas naturales y sociales y con las competencias ciudadanas, en particular, con lo que al cuidado del medio ambiente se refiere, en tanto conviene tener elementos conceptuales claros para hacer un uso racional de los servicios públicos, identificar cuándo se está haciendo un gasto innecesario de ellos, explicar las razones por las cuales pudo haberse incrementado el gasto y proponer medidas eficaces para el ahorro del agua, el gas y la energía eléctrica (MEN, 2006, p.64).

El pensamiento aleatorio, llamado también probabilístico o estocástico, ayuda a tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, de azar, de riesgo o de ambigüedad por falta de información confiable, en las que no es posible predecir con seguridad lo que va a pasar. El pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria. Ayuda a buscar soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura, abordándolos con un espíritu de exploración y de investigación mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y la utilización de estrategias como la exploración de sistemas de datos, la simulación de experimentos y la realización de conteos (MEN, 2006, p.64).

Los sistemas analíticos probabilísticos y los métodos estadísticos desarrollados durante los siglos XIX y XX se han refinado y potenciado en los últimos decenios con los avances de la computación electrónica y, por ello, hoy día ya no es tan importante para los estudiantes el recuerdo de las fórmulas y la habilidad para calcular sus valores, como sí lo es el desarrollo del pensamiento aleatorio, que les permitirá interpretar, analizar y utilizar los resultados que

se publiquen en periódicos y revistas, que se presenten en la televisión o que aparezcan en pantalla o en hojas impresas como productos de los distintos programas de análisis de datos (MEN, 2006, p.65).

Ya no es necesario aprender las fórmulas y procedimientos matemáticos para calcular la media o la mediana, la varianza o la desviación estándar, sino avanzar gradualmente en el desarrollo de habilidades combinatorias para encontrar todas las situaciones posibles dentro de ciertas condiciones, estimar si son o no igualmente probables y asignarles probabilidades numéricas, así como en dominar los conceptos y procedimientos necesarios para recoger, estudiar, resumir y diagramar sistemas de datos estadísticos y tratar de extraer de ellos toda la información posible con la ayuda de calculadoras, hojas de cálculo y otros programas de análisis de datos, con el fin de intentar predecir dentro de ciertos rangos el curso de los acontecimientos respectivos y de tomar decisiones lo más razonables posibles ante la imposibilidad de saber con certeza lo que va a pasar. (MEN, 2006, p.66).

Ahora bien, el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación ICFES, reorganiza los pensamientos espacial, métrico y aleatorio como componente geométrico métrico y componente aleatorio que adelante los notaremos como CGEO y CA respectivamente.

En lo que se refiere al componente geométrico métrico, en adelante CGEO argumenta que está relacionado con la construcción y manipulación de representaciones de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos y sus transformaciones; más específicamente, con la comprensión del espacio, el análisis abstracto de figuras y formas en el plano y en el espacio a través de la observación de patrones y regularidades, el razonamiento geométrico y la solución de problemas de medición, la descripción y estimación de magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, masa, etc.), transformaciones de figuras representadas en el plano o en el espacio, la selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos, el uso de unidades, los conceptos de perímetro, área y volumen (ICFES, 2016a).

Y el componente aleatorio, en adelante CA corresponde a la representación, lectura e interpretación de datos en contexto; el análisis de diversas formas de representación de información numérica, el análisis cualitativo de regularidades, de tendencias, y la formulación de inferencias y argumentos usando medidas de tendencia central y de dispersión; y por el reconocimiento, descripción y análisis de eventos aleatorios (ICFES, 2016a).

Las guías didácticas constituyen una herramienta pedagógica y esencial que ha sido utilizada tradicionalmente en la educación, y de la cual no se debe prescindir en los procesos de aprendizaje como lo indican Garcia y De la cruz (2014).

Garcia y De la cruz (2014) afirman que el profesor es quien orienta y dinamiza el aprendizaje del estudiante, adquiriendo la figura de intermediario entre éste y los contenidos, es por esto, que las guías didácticas juegan un papel importante como elemento didáctico orientador y motivador del aprendizaje autónomo.

Garcia y De la cruz (2014) consideran:

Como una guía didáctica al instrumento digital o impreso que constituye un recurso para el aprendizaje a través del cual se concreta la acción del profesor y los estudiantes dentro del proceso docente, de forma planificada y organizada, brinda información técnica al estudiante y tiene como premisa la educación como conducción y proceso activo (p.165).

Galarza y Páramo (2015) definen la autoevaluación,

Como una estrategia en donde cada sujeto evalúa sus propias acciones. Es decir, dado que todos los agentes educativos involucrados pueden y deben valorar su desempeño, el estudiante también puede y debe hacerlo. Es muy recomendable como medio valiosísimo para impulsar la formación integral, por cuanto mediante ella se logra aumentar en los estudiantes su autoestima, despertar su sentido de responsabilidad y afianzar su autonomía (p.40).

Inculcar en los estudiantes la importancia que tiene para su formación el saber valorar su propio desempeño con honradez, sinceridad y responsabilidad, a fin de que lleguen a conclusiones más o menos acertadas. (Galarza y Páramo, 2015, p.41)

De igual forma, Galarza y Páramo (2015) definen la coevaluación, como una evaluación complementaria de la autoevaluación, porque es la evaluación mutua que realizan los integrantes de un grupo.

La coevaluación es una forma innovadora de evaluar, la cual tiene por meta involucrar a los estudiantes en la evaluación de los aprendizajes y proporcionar retroalimentación a sus compañeros y, por tanto, ser un factor para la mejora de la calidad del aprendizaje (Galarza y Páramo, 2015, p.41).

Con la coevaluación se inculca, que el propósito es lograr un reconocimiento mutuo de las propias capacidades, logros y deficiencias con el fin de acordar estrategias de mejoramiento y, de ninguna manera, para sancionar, delatar o tomar represalias (Galarza y Páramo, 2015, p.41).

2.3 Marco contextual

La investigación se desarrolla dentro del contexto de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario, se encuentra ubicada en la Calle 8 N° 14 - 72 barrio El Rosario, zona urbana del municipio de Valencia, en el departamento de Córdoba; es un establecimiento educativo oficial, de modalidad académica, aprobado según resolución N°. 0005044 de noviembre 16 del 2000 y con aprobación de los niveles preescolar, básica primaria y básica secundaria; la resolución N°. 0000972 del 15 de diciembre del 2003 concede licencia de funcionamiento en el nivel de educación media académica y ratifica la resolución N°. 001631 de fecha 20 de septiembre del 2002; las cuales, son ratificadas por la resolución N°. 207 del 08 de junio/2011; la resolución N°. 001000 de fecha 18 de mayo del 2016, autoriza la ampliación del servicio educativo con la implementación de la jornada única de 40 horas semanales para los niveles de preescolar, básica y media académica.

El entorno de la institución está rodeado por calles destapadas y aguas residuales de la vecindad que se vierten por cunetas en las orillas de las calles. La infraestructura cuenta con 30 aulas para clases, de las cuales 14 se encuentran distribuidas en edificaciones de 2 pisos, unidad administrativa, baterías sanitarias para ambos sexos, sala de informática, cancha de fútbol, cancha de baloncesto y voleibol, punto vive digital, comedor escolar y zonas verdes.

Los servicios institucionales son brindados en jornada única, y cuenta con un equipo de 34 educadores especializados en las distintas áreas pedagógicas y con experiencia en el ejercicio docente distribuidos en los niveles académicos así: 4 en preescolar, 13 en básica primaria y 16 para básica secundaria y media académica y un tutor del programa todos a aprender.

La institución desarrolla al máximo la parte deportiva cultural, por ello se realizan anualmente el concurso departamental de bandas marciales y rítmicas, concursos de danza, juegos intercurios, exposiciones de arte y presentaciones musicales por parte de grupos de estudiantes instruidos dentro de la institución en diferentes eventos municipales.

Las familias NUSERISTAS están ubicadas en estratos 1 y 2, y el núcleo familiar de los educandos del NUSERO en su minoría se encuentra conformado por padre, madre e hijos; la mayoría de familias está desintegrada, por lo que es común encontrar madres y padres cabeza de hogar; así mismo, niños que conviven con familiares como abuelos, tíos, primos u otros.

El municipio de Valencia – Córdoba, se encuentra focalizado como zona de conflicto armado, debido al accionar de los grupos al margen de la ley; a pesar de todas estas dificultades, la población cuenta con zonas de recreación y esparcimiento, en las que se encuentran: parques, polideportivos y estadio, que permiten el aprovechamiento del tiempo libre.

3. Metodología de la investigación

3.1 Enfoque y tipo de investigación

Esta investigación se enmarca dentro del paradigma **Empírico - Analítico**.

El proceso de análisis y procesamiento de datos se asume desde el **método cuantitativo**.

3.2 Diseño metodológico

El diseño metodológico es **cuasi-experimental** denominado: Diseño de preprueba-postprueba y grupos intactos (uno de ellos de control) (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). A continuación, se presenta el esquema del diseño:

GE:	O ₁	X	O ₂
GC:	O ₃	-	O ₄

3.2.1 Población y muestra

Población: estudiantes de media académica de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario.

De la población de estudiantes de media académica, se tomó como muestra los estudiantes de grado décimo que estuvieron divididos en dos grupos: control y experimental.

Muestreo: a los grupos definidos al azar como control y experimental desde la perspectiva de la conformación interna de los grupos, se les realizó un muestreo intencionado de grupos intactos.

3.2.2 Operacionalización de variables

Se emplearán las siguientes variables:

Variable independiente: estrategias para el aprendizaje colaborativo en un ambiente de liderazgo.

Variable dependiente: nivel de desarrollo del pensamiento matemático medido en el componente geométrico métrico y el componente aleatorio.

La Tabla 1 nos muestra de forma detallada la operacionalización de la variable independiente.

Tabla 1. Operacionalización de variables

OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES							
TIPO DE VARIABLE	NOMBRE DE LA VARIABLE	COMPETENCIAS	DEFINICIÓN CONCEPTUAL	COMPONENTES	INDICADORES	ÍTEMS	ESCALA VALORATIVA
VARIABLE DEPENDIENTE	Nivel de desarrollo del pensamiento matemático medido en el componente geométrico métrico y en el componente aleatorio.	Interpretación y representación	Consiste en la habilidad para comprender y transformar la información presentada en distintos formatos como tablas, gráficas, conjuntos de datos, diagramas, esquemas, etcétera, así como la capacidad de utilizar estos tipos de representación para extraer de ellos información relevante que permita, entre otras cosas, establecer relaciones matemáticas e identificar tendencias y patrones. Con el desarrollo de esta competencia, se espera que un estudiante manipule coherentemente registros como el simbólico, el natural, el gráfico y todos aquellos que se dan en situaciones que involucran las matemáticas. Esta competencia está estrechamente relacionada con el proceso de comunicación definido en los <i>Estándares Básicos de Competencias</i> . (ICFES, 2016d)	Geométrico-métrico	Comprende y transforma la información presentada en polígonos.	34,35,36	De 1 a 17: BJ = Desempeño BAJO
				Geométrico-métrico	Establece relaciones matemáticas e identifica las razones trigonométricas	45,49,51	
				Geométrico-métrico	Manipula coherentemente registros gráficos de las cónicas que se dan en situaciones de la vida cotidiana	54,58, 59,60	
				Aleatorio	Comprende y determina la probabilidad de ocurrencia de eventos en situaciones cotidianas.	4	
				Aleatorio	Interpreta y transforma la información presentada en gráficas, conjuntos de datos, diagramas y esquemas, entre otros.	9,10,11, 12,13, 14,15, 16,17	
				Aleatorio	Frente a un problema que involucre polígono y áreas de polígonos	32,33,	
	Nivel de desarrollo del pensamiento matemático medido en el componente geométrico métrico y en el componente aleatorio.	Formulación y ejecución	Se relaciona con la capacidad para plantear y diseñar estrategias que permitan solucionar problemas provenientes de diversos contextos, bien sean netamente matemáticos o aquellos que pueden surgir en la vida cotidiana y son susceptibles de un tratamiento matemático. Se relaciona también con la habilidad o destreza para seleccionar y verificar la pertinencia de soluciones propuestas a problemas determinados, y analizar desde diferentes ángulos estrategias de solución. Con el desarrollo de esta competencia, se espera que un estudiante diseñe estrategias apoyadas en herramientas matemáticas, proponga y decida entre rutas posibles para la solución de problemas, siga estrategias dadas para encontrar soluciones y finalmente resuelva las situaciones con que se enfrenta. Esta competencia combina el proceso de formulación, tratamiento y resolución de problemas; el proceso	Geométrico-métrico	Plantea y aplica estrategias que lleven a soluciones adecuadas.	37,38	De 18 a 23 BS = Desempeño BÁSICO
				Geométrico-métrico	Plantea y desarrolla estrategias que permiten la solución de problemas cotidianos utilizando razones trigonométricas	43,44, 46,47	
				Geométrico-métrico	Aplica diferentes estrategias para la solución de problemas dados en representaciones geométricas o cónicas.	52,53	
				Aleatorio	Selecciona y justifica la pertinencia de las soluciones propuestas a problemas que involucran el azar.	2,6	
				Aleatorio	Habilidad para seleccionar y justificar la pertinencia de soluciones propuestas a diferentes tipos de	18,22, 23,24, 25,26	
				Aleatorio	Plantea y desarrolla estrategias que permiten la solución de problemas cotidianos utilizando razones trigonométricas	43,44, 46,47	
VARIABLE DEPENDIENTE	Nivel de desarrollo del pensamiento matemático medido en el componente geométrico métrico y en el componente aleatorio.	Formulación y ejecución	Se relaciona con la capacidad para plantear y diseñar estrategias que permitan solucionar problemas provenientes de diversos contextos, bien sean netamente matemáticos o aquellos que pueden surgir en la vida cotidiana y son susceptibles de un tratamiento matemático. Se relaciona también con la habilidad o destreza para seleccionar y verificar la pertinencia de soluciones propuestas a problemas determinados, y analizar desde diferentes ángulos estrategias de solución. Con el desarrollo de esta competencia, se espera que un estudiante diseñe estrategias apoyadas en herramientas matemáticas, proponga y decida entre rutas posibles para la solución de problemas, siga estrategias dadas para encontrar soluciones y finalmente resuelva las situaciones con que se enfrenta. Esta competencia combina el proceso de formulación, tratamiento y resolución de problemas; el proceso	Geométrico-métrico	Plantea y desarrolla estrategias que permiten la solución de problemas cotidianos utilizando razones trigonométricas	43,44, 46,47	De 24 a 26 A = Desempeño ALTO
				Geométrico-métrico	Aplica diferentes estrategias para la solución de problemas dados en representaciones geométricas o cónicas.	52,53	
				Aleatorio	Selecciona y justifica la pertinencia de las soluciones propuestas a problemas que involucran el azar.	2,6	
				Aleatorio	Habilidad para seleccionar y justificar la pertinencia de soluciones propuestas a diferentes tipos de	18,22, 23,24, 25,26	
				Aleatorio	Frente a un problema que involucre polígono y áreas de polígonos	32,33,	
				Aleatorio	Plantea y aplica estrategias que lleven a soluciones adecuadas.	37,38	

Argumentación	de formulación, comparación y ejercitación de procedimientos; y el proceso de modelación, todos descritos en los <i>Estándares Básicos de Competencias</i> . (ICFES, 2016d)	representación de datos (tablas y gráficas).			
		Plantea y aplica estrategias que permiten la solución de problemas cotidianos utilizando medidas de tendencia central.	28,29		
		Justifica estrategias de solución basándose en definiciones y propiedades de los polígonos y el cálculo de sus respectivas áreas.	31,39, 40,41		
		Justifica estrategias y procedimientos matemáticos utilizados para dar solución a problemas que involucran razones trigonométricas.	42,48, 50		
		Interpreta estrategias de solución basándose en las propiedades de las cónicas	55,56, 57		
		Reconoce estrategias de solución basándose en la Probabilidad de ocurrencia de un evento cualquiera.	1,3,5		
		Da razones del porqué o del cómo se dan las diferentes combinaciones en situaciones de la vida real	7,8		
		Justifica estrategias de solución basándose en la lectura, análisis e interpretación de tablas y gráficos estadísticos.	19,20, 21,27		
		Justifica estrategias y procedimientos matemáticos utilizados para dar solución a situaciones que requieren hallar las medidas de tendencia central.	30		
		Se relaciona con la capacidad para validar o refutar conclusiones, estrategias, soluciones, interpretaciones y representaciones en situaciones problemáticas, dando razones del porqué o del cómo se llegó a estas, utilizando ejemplos y contraejemplos, o bien señalando y reflexionando sobre inconsistencias presentes. Con el desarrollo de esta competencia se espera que un estudiante justifique la aceptación o el rechazo de afirmaciones, interpretaciones y estrategias de solución basándose en propiedades, teoremas o resultados matemáticos, o verbalizando procedimientos matemáticos. Esta competencia está estrechamente relacionada con el proceso de razonamiento definido en los <i>Estándares Básicos de Competencias</i> . (ICFES, 2016d)			

De 27 a 30

S =
Desempeño
SUPERIO
RFuente: *Elaboración propia*

En la Tabla 2 se puede observar el sistema de hipótesis asociado a este proyecto de investigación.

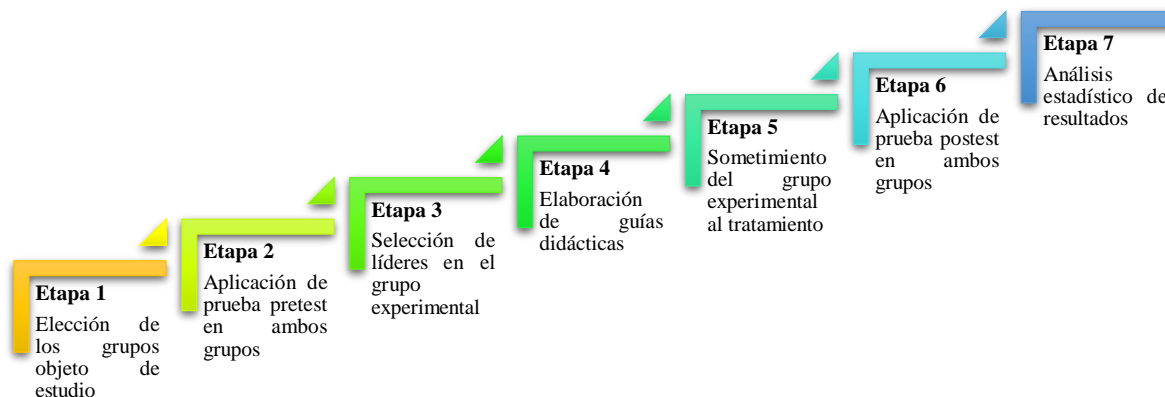
Tabla 2. Sistema de hipótesis.

SISTEMA DE HIPÓTESIS		
Diferencia entre grupos control y experimental.	Hipótesis asociadas al CGEO	<p>H₀: No hay diferencia estadísticamente significativa entre grupos control y experimental, cuando se interviene el grupo experimental con la EAC, en el nivel de desarrollo de competencias asociadas al CGEO.</p> <p>H₁: Hay diferencia estadísticamente significativa entre grupos control y experimental, cuando se interviene el grupo experimental con la EAC, en el nivel de desarrollo de competencias asociadas al CGEO.</p>
	Hipótesis asociadas al CA	<p>H₀: No hay diferencia estadísticamente significativa entre grupos control y experimental, cuando se interviene el grupo experimental con la EAC, en el nivel de desarrollo de competencias asociadas al CA.</p> <p>H₁: Hay diferencia estadísticamente significativa entre grupos control y experimental, cuando se interviene el grupo experimental con la EAC, en el nivel de desarrollo de competencias asociadas al CA.</p>
Diferencia intragrupo con los niveles de componente geométrico métrico y componente aleatorio en el grupo experimental.	Hipótesis asociadas al CGEO	<p>H₀: No hay diferencias significativas entre los resultados de las pruebas antes y después de la intervención con la EAC en el grupo experimental en los que respecta al nivel de CGEO.</p> <p>H₁: Hay diferencias significativas entre los resultados de las pruebas antes y después de la intervención con la EAC en el grupo experimental en los que respecta al nivel de CGEO.</p>
	Hipótesis asociadas al CA	<p>H₀: No hay diferencias significativas entre los resultados de las pruebas antes y después de la intervención con la EAC en el grupo experimental en los que respecta al nivel de CA.</p> <p>H₁: Hay diferencias significativas entre los resultados de las pruebas antes y después de la intervención con la EAC en el grupo experimental en los que respecta al nivel de CA.</p>

Fuente: Elaboración propia

3.2.3 Fases o etapas de la investigación

La investigación se desarrolló en siete etapas



Etapa 1. Elección de los grupos objeto de estudio.

Antes de dar inicio a la escogencia de los grupos, se solicitó al rector de la institución en estudio, el respectivo permiso para ejecutar el experimento con los estudiantes de grado décimo (ver Anexo A), para lo cual éste reconoció el objetivo de la investigación y dio su aprobación como se muestra en Anexo B.

De igual forma, se concertó con los estudiantes la disposición para participar dentro de la investigación y se procedió a informar a padres y madres de familia y/o acudientes de las condiciones para la contribución de los estudiantes, y se les solicitó autorizar por medio del consentimiento informado que se encuentra en Anexo C.

Luego, para dar inicio al experimento, en la primera etapa se realizó la elección de los grupos objeto de estudio (experimental y control). Desde la perspectiva de la conformación interna de los grupos de décimo grado dentro de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario, se realizó la escogencia al azar de grupos intactos, quedando distribuidos de la siguiente forma: Al grupo uno de estudiantes de grado décimo, en adelante se le denominará grupo experimental (GE) y al grupo dos se le denominará grupo control (GC).

Etapa 2. Aplicación de prueba pretest en ambos grupos

En esta etapa tuvo lugar la aplicación de la prueba pretest (ver Anexo D) que se realizó tanto al GE como al GC el mismo día, en el mismo horario de trabajo y bajo condiciones homogéneas, con el propósito de identificar lo referente al nivel de razonamiento y sus ideas

previas acerca de los objetivos de aprendizaje que se abordarán en los componentes geométrico métrico y aleatorio.

La prueba se diseñó con 30 preguntas del total de 60, que fueron validadas por los expertos y cuya distribución se muestra en la Tabla 3

Tabla 3. Distribución de preguntas para Pretest y Postest

DISTRIBUCIÓN DE PREGUNTAS EN PRETEST			
COMPONENTE	PREGUNTAS	COMPETENCIAS	PREGUNTAS
Geométrico-métrico	1 a 15	Interpretación y representación	1 a 5
		Formulación y ejecución	6 a 10
		Argumentación	11 a 15
Aleatorio	16 a 30	Interpretación y representación	16 a 20
		Formulación y ejecución	21 a 25
		Argumentación	26 a 30

Fuente: Elaboración propia

Etapa 3. Selección de líderes en el grupo experimental

En la tercera etapa se llevó a cabo la selección de líderes en el grupo experimental, por medio de un test de liderazgo (Ver Anexo E), tomado de la tesis de grado, de la autora Jimena Cárdenas Ríos realizada en la Pontificia Universidad Católica del Perú (Cárdenas, 2016), que permitió evaluar condiciones de liderazgo entre los estudiantes del GE como se ve en la Tabla 4:

Tabla 4. Resultados del test de liderazgo.

Estudiantes	Puntaje
Estudiante 5	111
Estudiante 11	115
Estudiante 13	110
Estudiante 15	113
Estudiante 21	112
Estudiante 23	113
Estudiante 24	111

Fuente: Elaboración propia

Para la selección de los estudiantes en la Tabla 4 se tuvo en cuenta aquellos que presentaron un puntaje mayor que 100.

Los estudiantes se reunieron con el docente investigador para ser informados de manera detallada sobre cómo se desarrollaría el experimento y las responsabilidades que debían cumplir durante este proceso. Los siete estudiantes estuvieron de acuerdo con las condiciones expuestas y se prepararon para dar inicio con el tratamiento (ver Tabla 5).

Tabla 5. Convenciones entre líderes y docente investigador.

CONVENCIONES ENTRE LÍDERES Y DOCENTE INVESTIGADOR	
Docente investigador	Estudiante líder
Entregar el tema con anticipación	Estudiar el tema previa sesión de profundización
Exposición del tema si se hace necesario, aclarar dudas	Sustentar el tema
Mostrar ejemplos	Llevar sus propios ejemplos a sesiones
Desarrollar ejercicios si es necesario	Llevar problemas resueltos y sustentarlos en sesión
No imponer los integrantes del grupo de trabajo	Cada líder escoge sus integrantes al azar
No evaluar numéricamente durante el tratamiento	Cada individuo realiza una autoevaluación y el estudiante líder realiza una coevaluación a su grupo

Fuente: Elaboración propia

Etapa 4. Elaboración de guías didácticas

En la cuarta etapa se diseñaron las guías didácticas a desarrollar en el grupo experimental. (Ver Anexo F). Las temáticas usadas en el diseño de las guías correspondieron a los contenidos propios de grado décimo, usados en la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario y establecidos en los lineamientos curriculares del MEN (2006). En el siguiente esquema se muestran los elementos de la guía utilizada.

Guía didáctica N°__

ÁREA Y/O ASIGNATURA		GRADO	PERIODO	TIEMPO
Área de estudio		Grado en que se ejecuta la guía	Período académico en que se ejecuta la guía	Tiempo de horas que se utilizan
ESTÁNDARES O PROCESOS DE APRENDIZAJE				
Da cuenta de los estándares que se incluyen en los procesos de aprendizaje y están relacionados con el pensamiento que se va a trabajar				
COMPONENTE(S)			COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	
Se nombran los componentes que se desarrollan con la ejecución de la guía			Se nombran las competencias que se desarrollan con la ejecución de la guía	
DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE				
N°	ENUNCIADO		EVIDENCIAS	
Número del DBA	Da cuenta de los enunciados del DBA correspondiente a la temática abordada		Se mencionan las evidencias asociadas al respectivo DBA en estudio	
CONTENIDOS				
TEMA	SUBTEMA		OBJETIVO DE LAS CLASES	MATERIAL DIDÁCTICO
Nombre de la unidad en estudio	Contenidos específicos del tema que se van a trabajar		Se describe concretamente lo que se espera evidencien los estudiantes al finalizar la guía	Elementos requeridos durante el desarrollo de la guías
ACCIONES METODOLÓGICAS EN EL AULA				
EXPLORACIÓN	ESTRUCTURACIÓN		PRÁCTICA	TRANSFERENCIA
Reconocimiento de saberes previos y propósito de aprendizaje. Desarrollo de diversas estrategias metodológicas a través de distintos estímulos que abordan la realidad del estudiante (lecturas, videos, preguntas problematizadoras, canciones, entre otras.)	Conceptualización y modelación frente al eje temático y objetivo de aprendizaje. Ejecución (acciones de aprendizaje según el uso de materiales educativos y el objetivo de aprendizaje).		Inicio de actividades que propicien la relación del estudiante con el nuevo conocimiento. Permite al estudiante confrontar su saber con el de sus compañeros, en el momentos que se generan discusiones, debates, lluvia de ideas, juegos, entre otros.	Conceptualización y modelación frente al eje temático y objetivo de aprendizaje En este momento el estudiante evidencia la aplicación del nuevo conocimiento y las habilidades desarrolladas en situaciones contextualizadas de la vida diaria..
EVALUACIÓN FORMATIVA				
COEVALUACIÓN			AUTOEVALUACIÓN	
El estudiante líder hace una consolidación de los aprendizajes y actitud de sus compañeros frente al desarrollo de la guía			Cada estudiante hace una consolidación de los aprendizajes y una evaluación acerca de su actitud frente al desarrollo de la guía	

Con los líderes escogidos en el grupo experimental se trabajaron 2 sesiones de 2 horas semanales (para un total de 4 horas de asesoría semanales con el docente orientador), con el propósito de realizar la profundización de contenidos, previas al desarrollo de las actividades propuestas en las guías didácticas que se trabajaron. Además, se creó un grupo de apoyo en redes sociales (WhatsApp) que permitió la interacción entre sus miembros, en donde se colocaron a consideración inquietudes y posibles soluciones a las dudas que surgieron durante el abordaje de la temática, así mismo, este grupo social permitió compartir de forma más ágil materiales de estudio y otros recursos digitales.

Luego, en el aula de clase cada líder trabaja con los integrantes de su grupo dándole a conocer la temática y desarrollando las guías didácticas previamente establecidas por el docente:

- Exposición del tema por parte de líder.
- Despejar dudas (las dudas de los integrantes del grupo serán atendidas por el líder, en caso de que éste no tenga la solución, será quien se dirija al docente y volverá con la respuesta a su compañero).
- Resolución de problemas estándar, tomados del texto matemáticas 10 (MEN, 2017b).

Los sujetos pertenecientes al grupo control se les aplicó la metodología clase magistral utilizaba normalmente y que consistía en:

- Exposición del tema por parte del profesor.
- Aclaración de dudas.
- Resolución de problemas-ejemplo.
- Aclaración de dudas sobre los ejercicios.
- Resolución de problemas estándar, tomados del texto matemáticas 10 (MEN, 2017b).

Las actividades que forman parte de la propuesta didáctica para el aprendizaje de matemáticas de este proyecto de investigación, fueron diseñadas con base a las necesidades que presentan los estudiantes de La Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario y que fueron expuestas en el planteamiento del problema.

El desarrollo del curso, se planifica considerando los contenidos del área de matemáticas que se imparten en grado décimo. La programación se desarrolla teniendo en cuenta los referentes de calidad diseñados por el Ministerio de Educación Nacional y el plan de área de matemáticas de la institución. Respecto al diseño de las actividades, cabe resaltar que fueron tomadas del texto Matemáticas distribuido por el Ministerio de Educación Nacional en las instituciones educativas de carácter público (MEN, 2017a), (MEN, 2017b) y otros fueron adaptados por el docente investigador.

Se proponen seis guías didácticas, las cuales abarcan diversos contenidos y actividades de aprendizaje que tienen como objetivo principal, mejorar de manera significativa los procesos de interpretación, representación, formulación, ejecución y argumentación en los

componentes geométrico métrico y aleatorio, a través de la estrategia de aprendizaje colaborativo mediada por ambientes de liderazgo, desarrollada por los estudiantes.

Se hizo necesario el estudio del tema polígonos, que no hace parte de los procesos de aprendizaje de grado décimo emitidos por el MEN; dado que, los estudiantes mostraron falencias en su ejecución, y requieren este saber previo para la resolución de algunos problemas de aplicación que se presentaron.

Para cada una de las sesiones se maneja la misma estructura y secuencia de trabajo similar, lo que hace que el estudiante se familiarice rápidamente con los tipos de actividades y que el docente se le facilite la orientación en las distintas etapas que se presentan.

Etapa 5. Sometimiento del grupo experimental al tratamiento.

En esta etapa, el grupo experimental fue sometido al tratamiento, iniciado con la escogencia de los estudiantes líderes (ver Tabla 4), los cuales fueron seleccionados por medio del test para medir condiciones de liderazgo que se encuentra en Anexo E, y sometidos a la profundización de los contenidos matemáticos que se desarrollan en grado décimo, escogidos para tratar esta investigación. Ellos acudieron dos días por semana durante dos horas de sesenta minutos en horario extracurricular con el docente investigador en las instalaciones de la institución educativa en estudio, para exposición del tema, resolución de ejemplos, ejercicios y esclarecer duda, como se puede verificar en Anexo G; todo esto previamente al desarrollo de cada una de las guías didácticas que fueron realizadas en horas de clase con el GE, cumpliendo con los acuerdos de la Tabla 5.

Cabe resaltar que estos estudiantes realizaron por cuenta propia el estudio de cada uno de los contenidos tratados, para que en las sesiones con el docente investigador estos conocimientos fueran comprensibles más rápidamente por ellos.

Además de las sesiones de trabajo, se creó un grupo de estudio en redes sociales (WhatsApp), que permitió la consulta de inquietudes o sugerencias por parte de los líderes en momentos distintos a las sesiones de trabajo, al mismo tiempo, que la interacción entre

los miembros, de modo que podían comunicarse entre sí, para compartir conocimientos y materiales de estudio digitales.

Los estudiantes trabajaron en siete grupos de cuatro miembros escogidos al azar por cada líder, y quedaron distribuidos de tal forma que cada grupo estuvo conformado por estudiantes con distintos niveles de habilidades para el aprendizaje de las matemáticas.

El proceso de la estrategia de aprendizaje colaborativo se inicia con el aprendizaje de los contenidos matemáticos por parte de los líderes, continuando con la transferencia a los demás integrantes de su grupo; luego de esto, el equipo trabajó en colaboración y en pro de que todos sus miembros alcanzarán de manera significativa, el aprendizaje de la temática, es decir, se logró que el grupo aunara esfuerzos para trabajar juntos en la tarea de investigar, y que cada miembro adquiriera la conceptualización de los contenidos tratados en esta investigación, haciendo uso de diversos recursos de aprendizaje para lograr su entendimiento.

Cada miembro del grupo debía ser responsable de su propio aprendizaje, y de ayudar a los demás compañeros con menos habilidades matemáticas a alcanzarlo, creando de esta forma, ambientes de logros alcanzados en colaboración, sin que se reflejara un individualismo.

De igual forma, se creó una interdependencia positiva, es decir, la necesidad de que los integrantes del grupo tuvieran que trabajar juntos para cumplir con las tareas asignadas, desarrollaran una colectividad no competitiva, dado que, cada uno tenía entendimiento de que, el éxito o fracaso era responsabilidad de todos.

Inicialmente algunos estudiantes se mostraron reacios a colaborar para la construcción de su propio conocimiento, pero a medida que avanzaban en las sesiones, se evidenciaba cómo realizaban la discusión de conceptos, resolución de problemas, construcción de conocimientos y fortalecimientos de los lazos de amistad con los demás compañeros.

Se aleccionó que aquellos estudiantes con menos habilidades matemáticas requirieran ayuda de los más competentes, y al mismo tiempo, que los más competentes logaran fortalecer sus conocimientos en la medida que iban explicando y reorganizando sus saberes, para que éstos, pudieran llegar de forma más accesible a sus compañeros.

Finalmente, se llevó a cabo la realización de las actividades propuestas en cada una de las guías didácticas, en donde se vio reflejado el desarrollo y cumplimiento de las tareas asignadas; además, cada integrante pudo realizar una parte de ella, sin que el grupo perdiera el objetivo común como se puede ver en Anexo H.

Etapa 6. Aplicación de prueba postest ambos grupos.

La prueba postest (ver Anexo I) que se le realizó al GE y al GC, tuvo lugar el mismo día, en el mismo horario de trabajo y bajo condiciones homogéneas, con el fin de identificar el nivel de desarrollo de los componentes geométrico métrico y aleatorio; además de verificar la eficacia de la estrategia de aprendizaje colaborativo en el desarrollo del pensamiento matemático.

La prueba se diseñó con las 30 preguntas restantes del total de 60, que fueron validadas por los expertos y cuya distribución se muestra en la Tabla 3.

Etapa 7. Análisis estadístico de resultados

En esta sección, presentaremos el análisis de los resultados obtenidos mediante la administración de las pruebas pretest y postest a los estudiantes de los grupos experimental y control, dando a conocer el progreso en los niveles de desarrollo del pensamiento matemático, medido a través del componente geométrico métrico y del componente aleatorio. La información obtenida nos permitió valorar la eficacia de la aplicación de la estrategia de aprendizaje colaborativo en el aprendizaje del CGEO y del CA que fueron diseñadas y aplicadas.

La Tabla 6 resume la información sobre cada grupo en estudio en lo referente al número de estudiantes y tipo de test administrados. En total, participaron 60 estudiantes en la

evaluación de las unidades de enseñanza, dado que, fueron eliminados los test que no estaban completos, pertenecientes a los estudiantes que faltaron a alguna de las sesiones de la administración de los test. Durante el período de aplicación de la investigación no se presentaron casos de deserción en la institución

Tabla 6. Cantidad de estudiantes que contestaron el pretest y el postest por grupos.

Grupo	Tipo	Número de estudiantes
10°- 1	Experimental	28
10°- 2	Control	32
Total		60

Fuente: Elaboración propia

Se realizó una interpretación de los resultados obtenidos en las pruebas pretest y postest para determinar la aceptación o negación de las hipótesis que surgieron el problema de investigación.

Con el propósito de realizar la clasificación de los niveles de desempeño de los estudiantes se tomaron las respuestas correctas e incorrectas a nivel general, por componentes y por competencias como se ilustra en la Tabla 7, y tomando como referente el total de preguntas (30 preguntas equivalentes al 100%) y la escala de valoración institucional utilizada por el NUSERO para su clasificación.

Tabla 7. Escala de valoración de la prueba.

Nivel de desempeño	Escala de valoración institucional	Número de ítems correctos en la prueba	Número de ítems correctos por componentes	Número de ítems correctos por competencias
BAJO	1,00 – 2,99	1 – 17	1 – 8	0 – 2
BÁSICO	3,00 - 3,99	18 - 23	9 – 11	3
ALTO	4,00 - 4,49	24 - 26	12 – 13	4
SUPERIOR	4,50 – 5,00	27 - 30	14 - 15	5

Fuente: Elaboración propia

Análisis de resultados pretest grupo control – grupo experimental

Luego ordenar la base de datos de desempeños en los grupos control y experimental para la prueba pretest (ver Anexo J) se procede a analizar los resultados de las preguntas acertadas y se observa en la Figura 9, que el 100% de los estudiantes se encuentra en un nivel bajo; tanto en el grupo control, como en el grupo experimental.

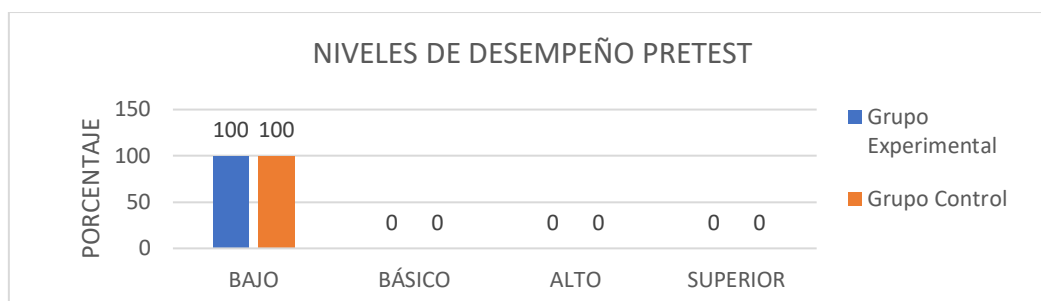


Figura 9. Niveles de desempeño de los estudiantes del GC y del GE en el pretest

Fuente: *Elaboración propia*

Los anteriores resultados son ratificados mediante la prueba no paramétrica de Mann Whitney aplicado para comparar los resultados del pretest en ambos grupos a través del software *SPSS versión libre*.

Para este análisis se tomó en cuenta el p-value (Sig. asintótica(bilateral)): si este es menor que 0,05, se concluye que hay diferencia significativa entre los grupos, en caso contrario se concluye que no hay diferencias significativas.

Tabla 8. Prueba no paramétrica de Mann Whitney para comparar grupo control con grupo experimental en la prueba pretest

ESTADÍSTICOS DE PRUEBA		Sig. asintótica(bilateral)
Competencias del CA	Interpretación y representación CA	0,638
	Formulación y ejecución CA	0,352
	Argumentación CA	0,084
	Componente Aleatorio	0,166
Competencias del CGEO	Interpretación y representación CGEO	0,388
	Formulación y ejecución CGEO	0,055
	Argumentación CGEO	0,058
	Componente geométrico métrico	0,350

Fuente: *SPSS 25 en su versión libre*

La Tabla 8 muestra los valores obtenidos al realizar una comparación entre los grupos experimental y control en la prueba pretest, mediante la ejecución de la prueba No Paramétrica de Mann Whitney, en la que se evidencia que el p-value adquirido en cada una de las competencias y componentes es mayor que 0.05, por lo cual se concluye que no hay diferencias significativas entre el grupo control y experimental antes de iniciar la intervención con la estrategia de aprendizaje colaborativo. Sin embargo, se detalla las diferencias entre las competencias de los componentes aleatorio y geométrico métrico.

Después de examinar los niveles de desempeño del componente aleatorio (Figura 10), tanto en el grupo control, como en el grupo experimental, se evidencia un alto porcentaje de estudiantes con desempeño bajo; mientras que, en los niveles alto y superior tienen un porcentaje de 0%. De igual modo, se observa que el grupo experimental tiene un mejor desempeño en este componente; dado que, en el nivel básico se encuentra un 35,7% de los estudiantes, y en el nivel bajo el porcentaje es menor que el del grupo control. A pesar de que, las diferencias son a favor del grupo experimental, éstas no son significativas como lo asegura la prueba de Mann Whitney en la Tabla 8

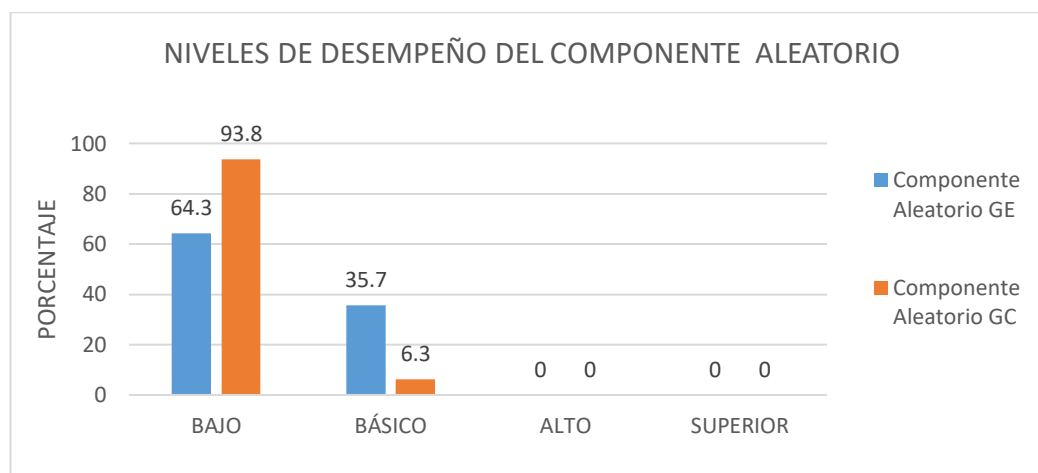


Figura 10. Niveles de desempeño de los estudiantes del GC y del GE en el componente aleatorio.

Fuente: *Elaboración propia*

En cuanto a los niveles de desempeño de los estudiantes en el componente geométrico métrico, en la Figura 11, se muestra que, tanto el grupo control, como el grupo experimental, se encuentran en un nivel bajo, con un porcentaje mínimo en el nivel básico y un porcentaje

nulo en los niveles alto y superior. De lo anterior, se puede concluir que ambos grupos presentan falencias en cuanto al componente geométrico métrico y no existen diferencias significativas entre GE y GC (ver Tabla 8).

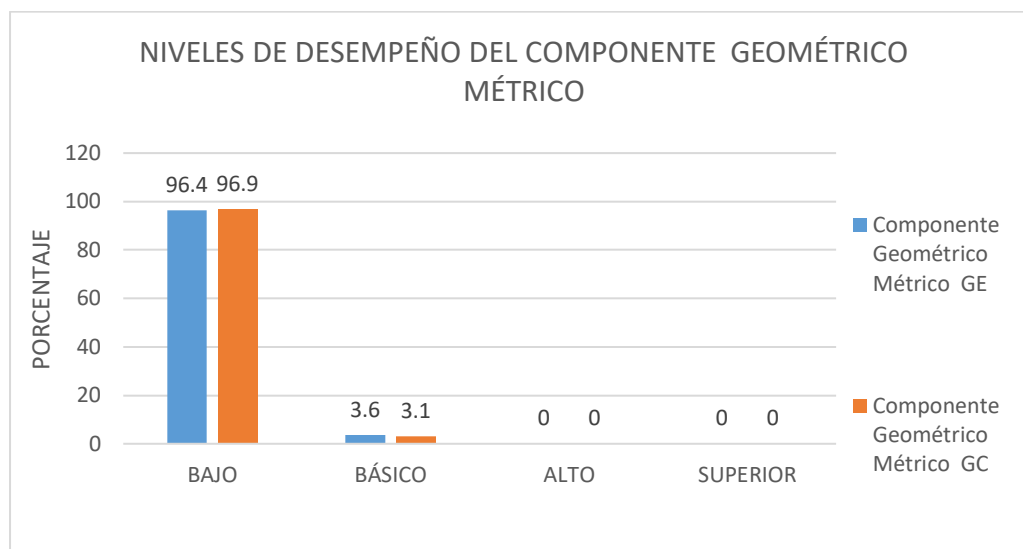


Figura 11. Niveles de desempeño de los estudiantes del GC y del GE en el componente Geométrico métrico

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 12, se registra que, para la competencia de interpretación y representación el grupo experimental se encuentra con un 14.3% de sus estudiantes en nivel bajo, 50% en un nivel básico y el 35.7% restante en los niveles alto y superior, se encuentran con un nivel de competencias del componente aleatorio más alto que los estudiantes del grupo control, que presentan 71.9% en nivel bajo, 28.2% en niveles básico y alto, y 0% en superior. En cuanto a la competencia de formulación y ejecución se observa que 32,1% de los estudiantes del GE se encuentran entre los niveles básico y alto; mientras que, sólo el 21,9% de los del GC se encuentran en estos niveles; así mismo, se distingue de forma clara que el grupo control tiene mayor número de estudiantes en desempeño bajo. Ahora bien, la competencia de argumentación nos muestra que los estudiantes del GE se encuentran en mejor desempeño que los del GC, dado que, 78,1% están en nivel bajo, mientras que el 60,7% de los del GE están en este mismo nivel. Sin embargo, las anteriores diferencias no son significativas, como lo confirma la Tabla 8.

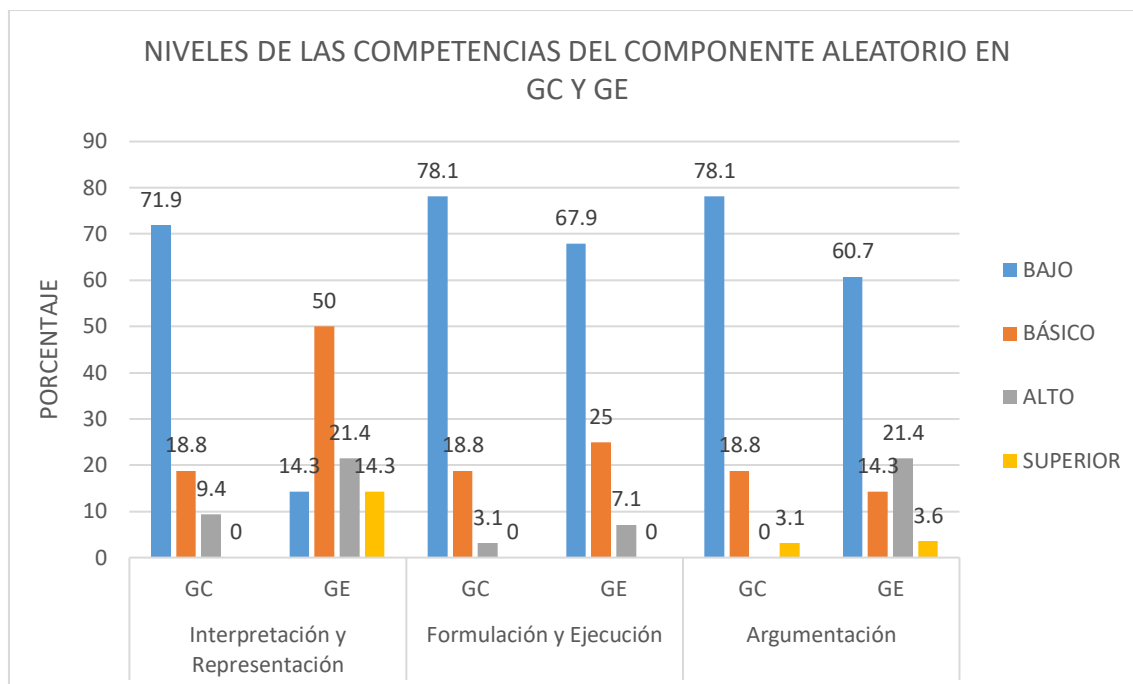


Figura 12. Niveles de desempeño de los estudiantes del GC y del GE en las competencias del componente aleatorio.

Fuente: *Elaboración propia*

En lo que refiere a los niveles de las competencias del componente geométrico métrico en el GC y el GE, se observa en la Figura 13, que en la competencia interpretación y representación el grupo experimental presenta 8% más de estudiantes que el grupo control en el nivel bajo; en la competencia formulación y ejecución el grupo experimental tiene el 100% de sus estudiantes en nivel bajo, mientras que el grupo control tiene el 87,5% en bajo y el 12,6% restante repartido en partes iguales en los niveles básico y alto; en cuanto a la competencia argumentación en el grupo experimental solo presenta un 64,3% en nivel bajo, mientras que, el grupo control tiene el 100% de sus estudiantes en nivel bajo. En contraste con lo anterior, la Prueba no paramétrica de Mann Whitney para comparar grupo control con grupo experimental en la prueba pretest consolida que no existen diferencias estadísticamente significativas en este componente.

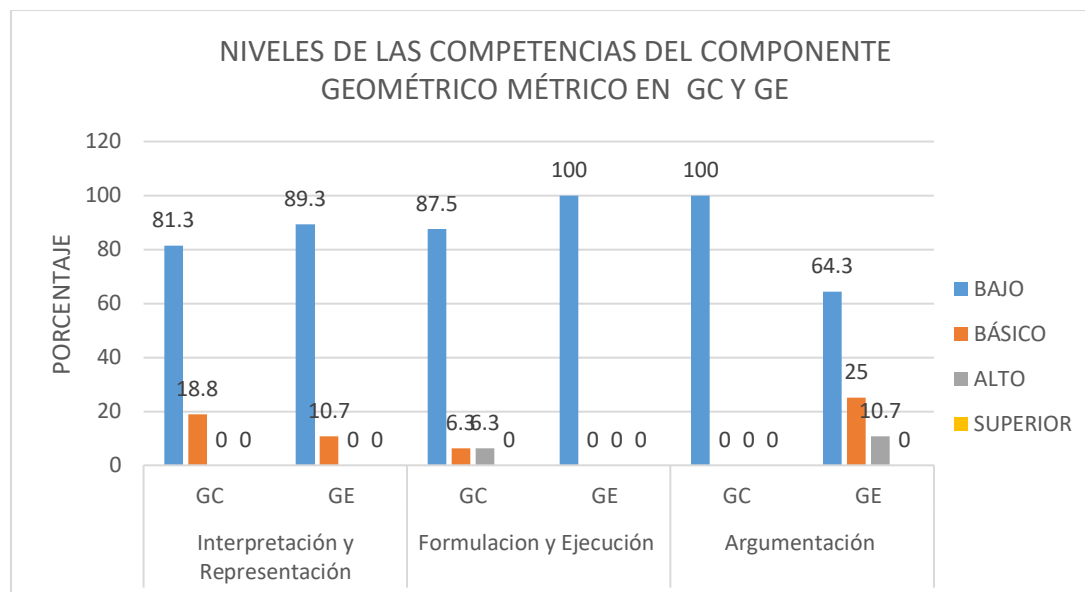


Figura 13. Niveles de desempeño de los estudiantes del GC y del GE en las competencias del componente geométrico métrico.

Fuente: *Elaboración propia*

Análisis de resultados postest grupo control – grupo experimental

Después de la implementación de las guías didácticas diseñadas para la aplicación en el grupo experimental y realizar la prueba postest se obtuvo de la base de datos de desempeños en los grupos control y experimental (ver Anexo K), los resultados que se detallan a continuación.

En la Figura 14 observamos que, en los resultados obtenidos en el postest, los niveles de desempeño del grupo control exponen grandes diferencias con respecto a los niveles de desempeño del grupo experimental en lo referente a la adquisición de los niveles básico, alto y superior por parte del GE, en donde el 75% de los estudiantes se encuentra en estos tres niveles con porcentajes 50%, 14,3% y 10,7% respectivamente.

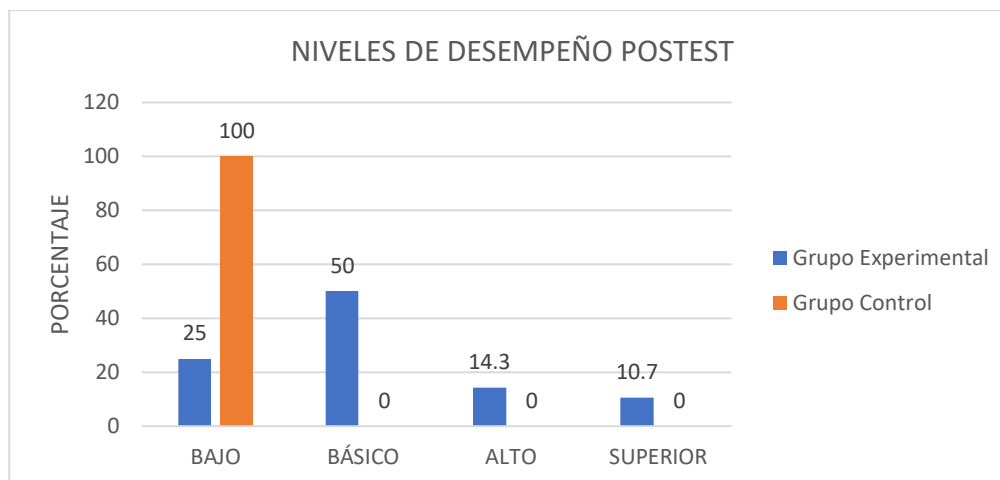


Figura 14. Niveles de desempeño de los estudiantes del GC y del GE en el postest

Fuente: Elaboración propia

Para completar el análisis aplicamos la prueba no paramétrica de Mann Whitney a través del software *SPSS versión libre*, para comparar los resultados del postest en ambos grupos. En la Tabla 9 se observa que el p-value obtenido en el análisis fue menor que 0,05, lo cual permite afirmar que hay diferencias significativas entre los resultados obtenidos en la prueba postest entre los grupos control y experimental. Lo anterior permite concluir que la aplicación de la estrategia de aprendizaje colaborativo fue más eficaz para aumentar los niveles de desempeño de los estudiantes que el método tradicional, esto se verifica en la siguiente tabla.

Tabla 9. Prueba no paramétrica de Mann Whitney para comparar grupo control con grupo experimental en la prueba postest

ESTADÍSTICOS DE PRUEBA		Sig. asintótica(bilateral)
Competencias del CA	Interpretación y representación CA	0,000
	Formulación y ejecución CA	0,013
	Argumentación CA	0,000
	Componente Aleatorio	0,000
Competencias del CGEO	Interpretación y representación CGEO	0,000
	Formulación y ejecución CGEO	0,000
	Argumentación CGEO	0,000
	Componente geométrico métrico	0,000

Fuente: SPSS 25 en su versión libre

La Figura 15 indica las diferencias encontradas en los niveles de desempeños de los grupos experimental y control, en cuanto al componente aleatorio. Se observa que el 78,1%

de los estudiantes del GC se encuentran en nivel bajo, mientras que, el 78,6% de los estudiantes del GE se encuentran repartidos entre los niveles básico, alto y superior, estos resultados se reafirman en la Tabla 9.

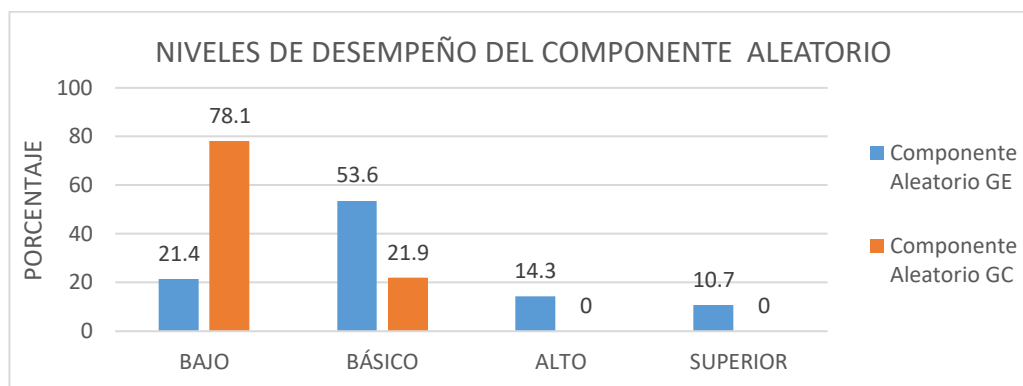


Figura 15. Niveles de desempeño de los estudiantes del GC y del GE en el componente aleatorio en la prueba postest.

Fuente: Elaboración propia

Cuando se hace un análisis más profundo del componente aleatorio en ambos grupos: experimental y control, se puede observar las diferencias encontradas de forma más detallada, como lo ilustra la Figura 16, en la que se nota que el grupo experimental se encuentra con niveles de desempeños mucho más altos que el grupo control.

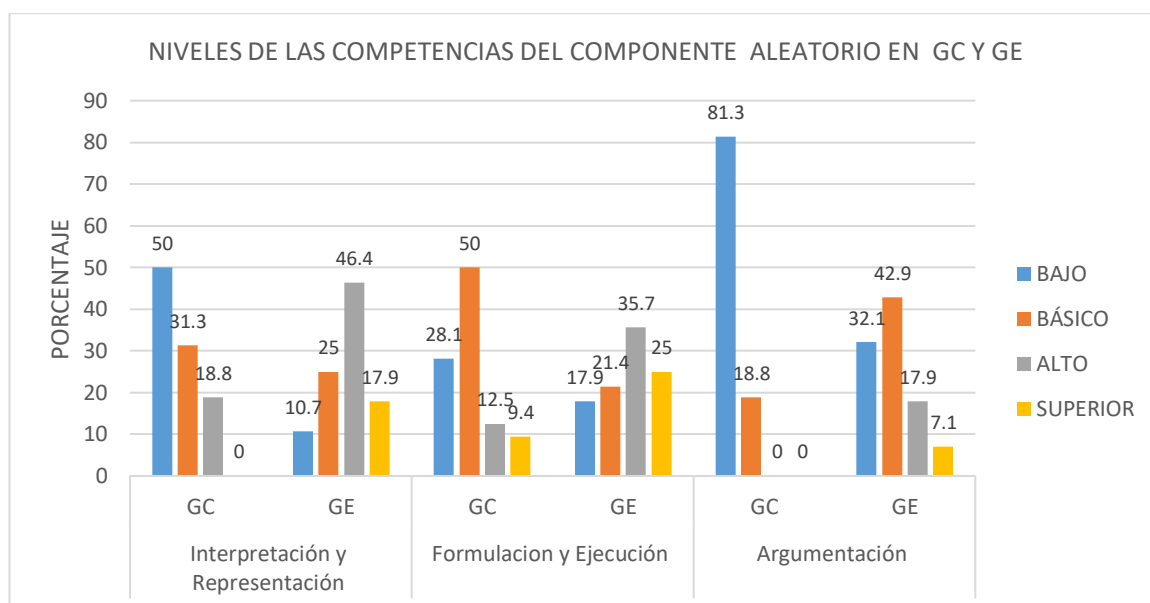


Figura 16. Niveles de desempeño de los estudiantes del GC y del GE en las competencias del componente aleatorio en la prueba postest.

Fuente: Elaboración propia

Ahora bien, la Figura 17 señala que el 100% de los estudiantes del GC se encuentran en un nivel bajo, a diferencia del grupo experimental que tiene un 35,7%, 32,1%, 21,4% y 10,7% en los niveles: bajo, básico, alto y superior respectivamente. Esta información permite concluir que hay diferencias significativas entre los estudiantes del GC y GE en cuanto a los niveles de desempeño del componente geométrico métrico en la prueba postest, esto se corrobora con la Tabla 9.

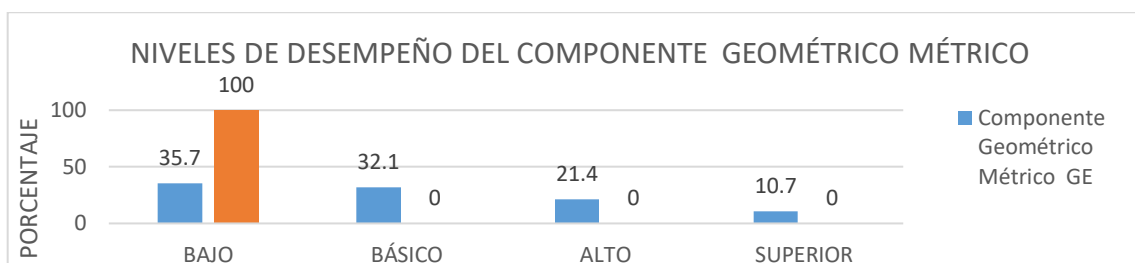


Figura 17. Niveles de desempeño de los estudiantes del GC y del GE en el componente geométrico métrico en la prueba postest

Fuente: *Elaboración propia*

Al hacer un análisis minucioso de las competencias del componente geométrico métrico, en la Figura 18 se puede observar que el grupo control tiene alto porcentaje de estudiantes en el nivel bajo en las competencias: interpretación y representación, formulación y ejecución y argumentación, diferenciándose del grupo experimental que posee gran porcentaje de estudiantes en los niveles básico, alto y superior en las competencias antes mencionadas.

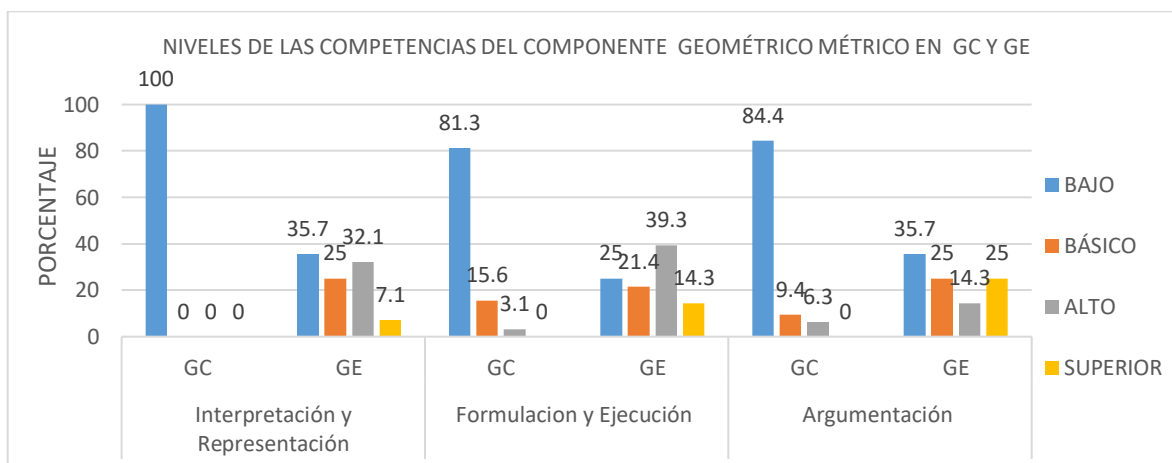


Figura 18. Niveles de desempeño de los estudiantes del GC y del GE en las competencias del componente geométrico métrico.

Fuente: *Elaboración propia*

Análisis de resultados pretest– postest grupo experimental

Al realizar las comparaciones entre los niveles de desempeño que presentaron los estudiantes del grupo experimental antes y después de la intervención con la estrategia de aprendizaje colaborativo mediado por ambientes de liderazgo, se puede observar en la Figura 19, las diferencias presentadas entre los resultados obtenidos en la prueba pretest y postest. Se observa que el GE pasó de un 100% de estudiantes en nivel bajo a tan solo un 25%, aumentando de esta manera el porcentaje en los niveles básico, alto y superior a 50%, 14,3% y 10,7% respectivamente.



Figura 19. Niveles de desempeño de los estudiantes del grupo experimental en pretest y postest

Fuente: Elaboración propia

Los anteriores resultados se revalidan con la prueba de Wilcoxon (ver Tabla 10); y, por ende, se puede concluir que hay diferencia significativa entre los resultados obtenidos en el grupo experimental antes y después de la intervención con la EAC.

Tabla 10. Prueba no paramétrica de Wilcoxon para comparar pretest y postest del grupo experimental

ESTADÍSTICOS DE PRUEBA		Sig. asintótica(bilateral)
Competencias del CA	Interpretación y representación CA	0,109
	Formulación y ejecución CA	0,000
	Argumentación CA	0,216
Componente Aleatorio		0,001
Competencias del CGEO	Interpretación y representación CGEO	0,000
	Formulación y ejecución CGEO	0,000
	Argumentación CGEO	0,004
Componente geométrico métrico		0,000

Fuente: SPSS 25 en su versión libre

En la Figura 20 se puede apreciar las diferencias positivas a favor de la prueba posttest en cuanto al componente aleatorio, donde se muestra que el porcentaje de estudiantes en nivel bajo disminuyó en un 42,9%; aumentando de esta manera los porcentajes en los niveles básico, alto y superior.

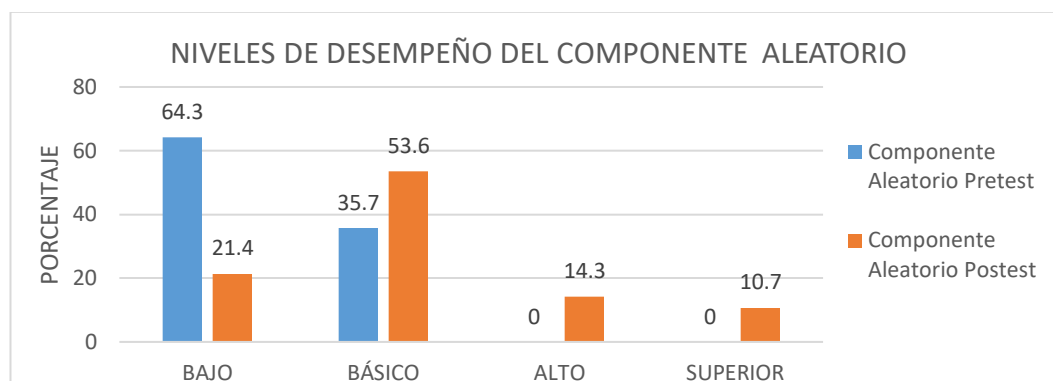


Figura 20. Niveles de desempeño del componente aleatorio del GE en pretest y posttest

Fuente: Elaboración propia

Lo anterior indica que hubo diferencias significativas en cuanto al grupo experimental, antes y después del experimento. Esta información se corrobora con la Tabla 10.

La Figura 21 indica los cambios positivos que se presentaron en los niveles de las competencias del componente aleatorio en el grupo experimental después de la intervención con la EAC, se observa que hubo diferencias significativas en las competencias interpretación y representación, formulación y ejecución a causa de que existió un aumento en los porcentajes de los niveles alto y superior, esto se verifica en la Prueba no paramétrica de Wilcoxon para comparar pretest y posttest del grupo experimental.

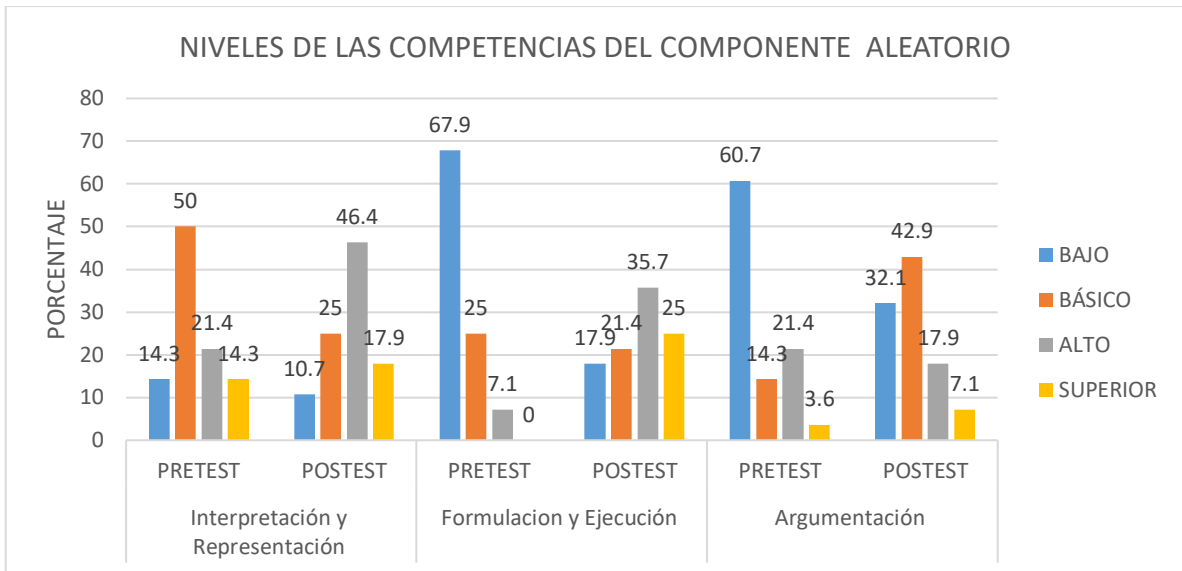


Figura 21. Niveles de desempeño de las competencias del componente aleatorio del GE en pretest y posttest

Fuente: Elaboración propia

A pesar de que no hubo diferencias significativas en la competencia de argumentación del componente aleatorio como se muestra en la Tabla 10, $p\text{-value} = 0,216$, sí existió una diferencia de 5,25 al pasar de 33,86 a 39,11 en los rangos promedios a favor del posttest, como se demuestra en la Figura 22.

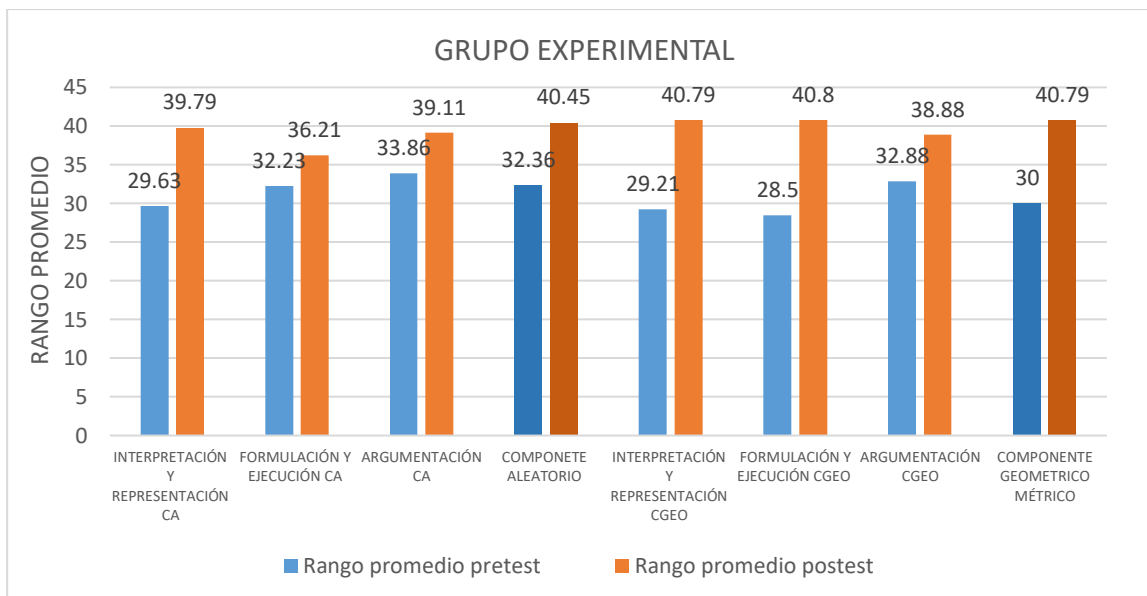


Figura 22. Rangos promedios de la prueba de Mann Whitney para pretest-posttest grupo experimental

Fuente: Elaboración propia

En lo que se refiere a los niveles de desempeño del componente geométrico métrico en la Figura 23, se muestra una mejora significativa para el grupo experimental, dado que, del 96,4% de los estudiantes que se encontraban en nivel bajo, solo el 35,7% quedaron en este nivel; aumentado de esta manera respectiva en 32,1%, 21,4% y 10,7% los niveles básico, alto y superior. Lo anterior se verifica en la Tabla 10

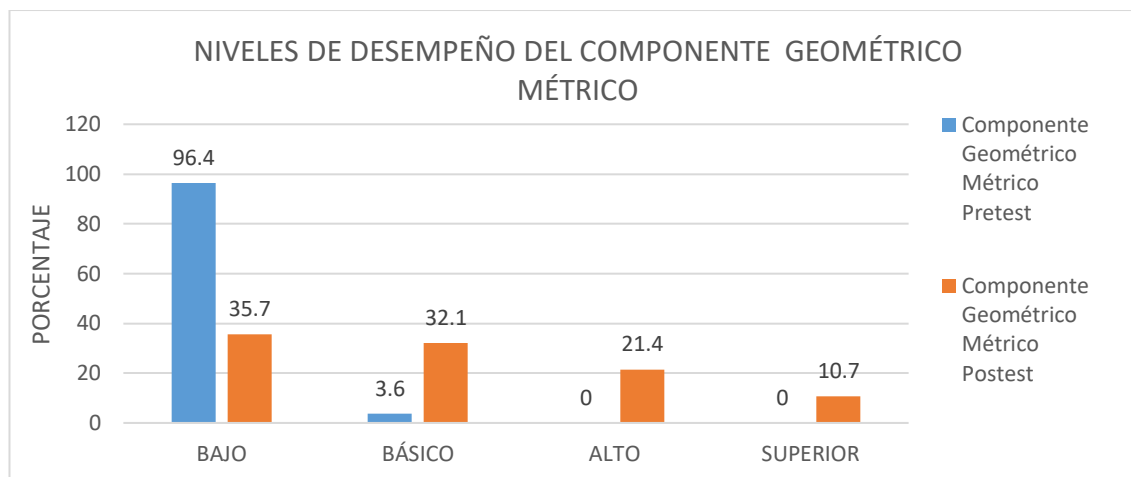


Figura 23. Niveles de desempeño del componente geométrico métrico del GE en pretest y posttest

Fuente: *Elaboración propia*

Finalmente, en los niveles de las competencias del componente geométrico métrico hubo diferencias significativas (ver Tabla 10) entre los resultados de la prueba pre y pos en el grupo experimental tal y como aparece en la Figura 24. Los porcentajes aumentaron en los niveles básico, alto y superior después del experimento.

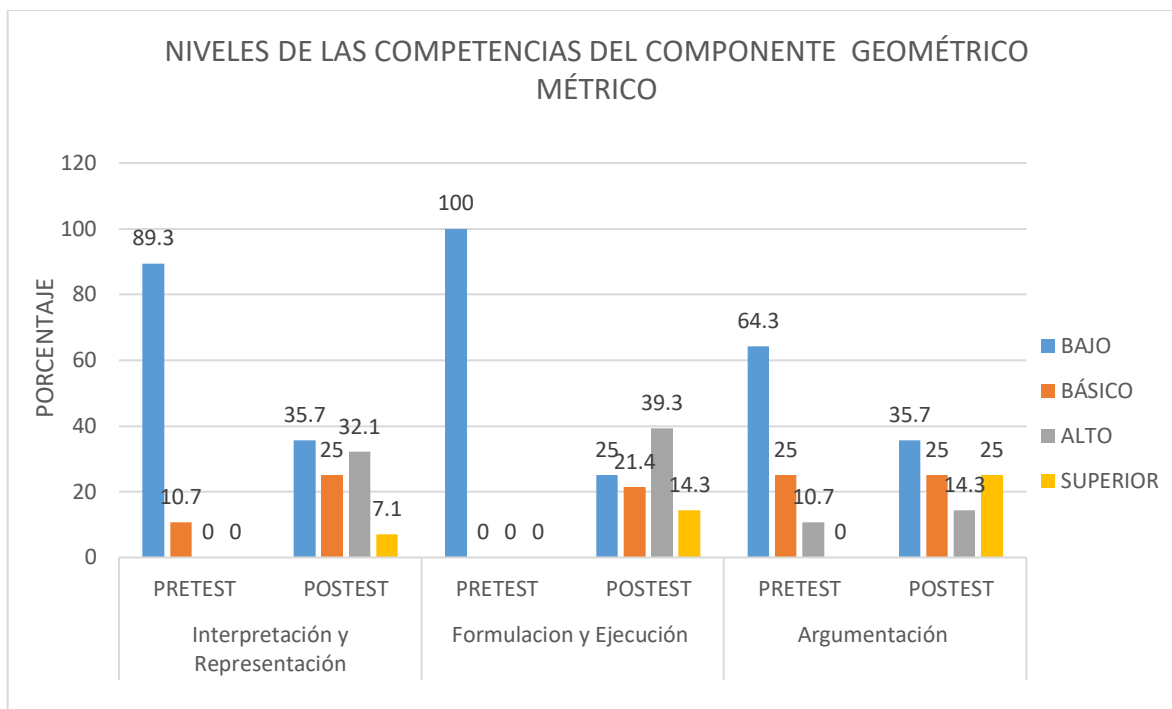


Figura 24. Niveles de desempeño de las competencias del componente geométrico métrico del GE en pretest y posttest

Fuente: *Elaboración propia*

Análisis de resultados pretest– posttest de los líderes del grupo experimental

Luego de realizar las comparaciones entre los niveles de desempeño, que presentaron los estudiantes líderes del grupo experimental antes y después de la intervención con la estrategia de aprendizaje colaborativo, mediado por ambientes de liderazgo, la Tabla 11 muestra el progreso de cada uno de los estudiantes.

Tabla 11. Resultados pretest– postest de los líderes del grupo experimental

Competencias y componentes	Est 5		Est 11		Est13		Est15		Est 21		Est 23		Est 24	
	Pre	Pos	Pre	Pos	Pre	Pos	Pre	Pos	Pre	Pos	Pre	Pos	Pre	Pos
Interpretación y representación	1	3	2	2	1	4	2	2	2	4	1	3	1	4
Formulación y ejecución	1	3	1	4	2	4	1	3	1	3	3	4	1	4
Argumentación	3	2	1	1	4	4	2	2	1	1	1	1	1	3
Componente aleatorio	1	2	1	2	2	4	1	2	1	2	1	2	1	4
Interpretación y representación	1	3	2	3	1	3	1	3	1	2	1	4	1	3
Formulación y ejecución	1	4	1	2	1	4	1	3	1	3	1	4	1	4
Argumentación	3	3	1	3	1	4	1	4	1	4	1	4	2	4
Componente geométrico métrico	1	3	1	2	1	4	1	3	1	3	1	4	1	4
Total prueba	1	3	1	2	1	4	1	2	1	2	1	3	1	4

Fuente: Elaboración propia

El estudiante 5 presentó un rendimiento bajo en pretest, más específicamente en los componentes aleatorio y geométrico métrico, y mostró mejoras en estos componentes durante la prueba postest, ubicándolo en un rendimiento alto y evidenciando mayores facilidades para el aprendizaje del componente geométrico métrico.

El estudiante 11 presentó un rendimiento bajo en los componentes aleatorio y geométrico métrico durante el pretest, y a pesar que sólo alcanzó un rendimiento básico en el postest, el proyecto le permitió mejoras en su rendimiento académico, puesto que, este estudiante no se destacaba académicamente el área de matemáticas.

El estudiante 13 se caracteriza por tener habilidades para la comprensión del área de matemáticas, y esto se vio reflejado en el paso de rendimiento bajo en el pretest a rendimiento superior en todas las competencias y componentes evaluados, exceptuando la competencia de interpretación y representación del componente geométrico métrico.

El estudiante 15 pasó de rendimiento bajo en el pretest a rendimiento básico en el postest, mostrando mayores facilidades para el aprendizaje del componente geométrico métrico cuyo rendimiento fue alto.

El estudiante 21 presentó un rendimiento bajo en el pretest y alcanzó un rendimiento básico en el postest, con mejores resultados en la competencia interpretación y representación del componente aleatorio y argumentación del componente geométrico métrico.

El estudiante 23 se caracterizó por presentar pocas habilidades para el aprendizaje de las matemáticas, por la apatía que se percibía para su estudio, pero al presentar aptitudes para el liderazgo, decidió afrontar el proyecto como un reto para mejorar su rendimiento académico y esto se vio reflejado en el paso de un rendimiento bajo en el pretest, a un rendimiento alto en el postest, mostrando mayor facilidad para la comprensión del componente geométrico métrico, en donde se ubicó en un rendimiento superior en todas las competencias estudiadas.

El estudiante 24 se caracteriza por tener habilidades para la comprensión del área de matemáticas, y esto se vio reflejado en el paso de rendimiento bajo en el pretest a rendimiento superior en todas las competencias y componentes evaluados, exceptuando la competencia argumentación del componente aleatorio y la competencia interpretación y representación del componente geométrico métrico, en las que tuvo rendimiento alto.

3.2.4 Instrumentos (Diseño de instrumentos, validación, técnicas de aplicación)

Se aplicaron pruebas pretest y postest a los grupos experimental y control, con el propósito de identificar el nivel de desarrollo tanto del CGEO como del CA al inicio del estudio en el GE y en el GC; y en un segundo instante para determinar el nivel de desarrollo del CGEO y del CA con el GC, y después de la intervención al GE. En el diseño de estos instrumentos que evalúan las competencias: comunicación, representación y modelación; planteamiento y resolución de problemas; razonamiento y argumentación; del mismo modo que, los procesos matemáticos en las temáticas relacionadas con los componentes estudiados se utilizaron 60 preguntas seleccionadas de las pruebas saber 11° de los años 2013 – 2016.

3.2.4.1 Obtención de la información

Los datos o calificaciones sobre los niveles de competencia del componente geométrico métrico y el componente aleatorio, serán las respuestas obtenidas de los estudiantes en el pretest y posttest aplicado a los grupos experimental y control de la institución.

Estos test poseen la estructura de preguntas de opción múltiple con única respuesta de acuerdo al nivel de competencia que se está evaluando, por lo tanto, su medición se ajusta a la condición de respuesta correcta o incorrecta.

3.2.4.2 Validación

El juicio de expertos se define como *“una opinión informada de personas con trayectoria en el tema, que son reconocidas por otros como expertos cualificados en éste, y que pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones”*. (Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez, 2008:29).

El test de conocimientos en el área de matemáticas que fue aplicado a los estudiantes del GE y el GC de la institución educativa fue validado por cinco personas de las diferentes instituciones educativas de la zona urbana del municipio. El test de liderazgo aplicado a los estudiantes del grupo experimental para medir condiciones de liderazgo fue tomado de la tesis de grado de (Cárdenas, 2016) y evaluado por cuatro expertos en la temática.

Los anteriores individuos fueron escogidos por su experiencia en la realización de juicios, reputación en la comunidad, disponibilidad, imparcialidad y su relación con el área que se desea abordar (ver Anexo L). Estas personas reconocieron en su valoración que los instrumentos reunieron los requisitos suficientes y necesarios para ser considerados válidos y confiables; y, por tanto, aptos para su aplicación, así mismo, eran pertinentes, presentaban una buena redacción y se adaptaban al contexto (ver Anexo M).

3.2.4.3 Confiabilidad del instrumento de evaluación

Para determinar el grado de confiabilidad de las pruebas se utiliza la siguiente escala:

Tabla 12. Escala de confiabilidad.

Rango	Magnitud
0,81 a 1,00	Muy Alta
0,61 a 0,80	Alta
0,41 a 0,60	Moderada
0,21 a 0,40	Baja
0,01 a 0,20	Muy Baja

Fuente: Ruiz (2002)

Confiabilidad del instrumento de evaluación test de liderazgo

Para determinar la consistencia interna del test de liderazgo, en el que cada estudiante marca en una escala de 1 a 5 el valor que mejor representa su respuesta, se utiliza el modelo propuesto por Cronbach (1951); denominado de Alfa de Cronbach, que es una variación del modelo de Kuder y Richardson (1937), que permite estimar la fiabilidad en estos casos (Ruiz, 2002).

Tabla 13. Estadístico de fiabilidad test de liderazgo.

Estadístico de fiabilidad	Alfa de Cronbach	N de elementos	Magnitud (según Tabla 12)
Test de liderazgo	0,920	28	Muy Alta

Fuente: SPSS 25 en su versión libre

Confiabilidad del instrumento de evaluación pretest-postest

Para establecer la confiabilidad del instrumento, éste se dividió en dos pruebas homogéneas teniendo en cuenta los componentes, las competencias y la temática desarrollada, y se aplicó a un grupo 34 estudiantes de una institución educativa bajo el mismo contexto de la institución en estudio.

Para determinar la consistencia interna de la prueba conformada por respuesta dicotómica (correcto-incorrecto) se empleó el procedimiento desarrollado por Kuder y Richardson (1937) conocido como (KR-20), que se calculó a partir de una sola

administración de la prueba, la cual consistió en la evaluación de la ejecución en cada pregunta (Ruiz, 2002) y arrojó los siguientes resultados.

Tabla 14. Estadísticos de fiabilidad de los componentes aleatorio y geométrico métrico

Estadístico de fiabilidad	KR-20	Nº de elementos	Magnitud (según Tabla 12)
Componente aleatorio	0,820	15	Muy Alta
Componente geométrico métrico	0,800	15	Alta
Componente geométrico métrico y componente aleatorio	0,820	30	Muy Alta

Fuente: Elaboración propia

3.2.5 Técnicas de análisis utilizadas

Se estudiaron dos grupos experimental y control, a éstos se les aplicó un pre-test, para verificar la homogeneidad de los mismos antes de la aplicación del tratamiento, así mismo, a los estudiantes del grupo experimental se les aplicó un cuestionario que evaluó potencial de liderazgo. Luego, uno de los grupos fue sometido al tratamiento experimental y finalmente a ambos se le aplicó un posttest-test para realizar los comparativos e inferir sobre los efectos de las variables.

4. Discusión de resultados

Con la aplicación de diversas estrategias se logra un aprendizaje mucho más eficaz, que con el desarrollo de la metodología tradicional como sustentan (Arreguín, Alfaro y Ramírez, 2012), (Fuentes, Portillo y Robles, 2015), (Díaz y Palomino, 2016), (Sáenz y Patiño, 2017) y (Pacheco y Reyes, 2018).

Por otro lado, la aplicación de la estrategia de aprendizaje colaborativo fue de gran relevancia para esta investigación, puesto que, se alcanzó que los estudiantes desarrollaran de manera colaborativa y mediados por ambientes de liderazgo, contenidos matemáticos específicos, en donde el proceso de enseñanza fue orientado mediante una estrategia innovadora para ellos, caso similar resultó en la investigación: Arreguín et al. (2012).

Así mismo, la EAC permitió la interacción de los estudiantes, organización del trabajo en grupo, la construcción conjunta de saberes, desarrollo de habilidades sociales, fortalecimiento de lazos de amistad y confianza, como se evidenció en Arreguín et al. (2012). Se debe agregar que, los estudiantes líderes, además de lograr un cambio de actitud en sí mismos y en sus compañeros, frente a la forma de ver la matemática, tuvieron la oportunidad de explorar, plantear, resolver problemas y enseñar a sus compañeros a reconocer situaciones para la aplicación de conocimientos matemáticos; al mismo tiempo que necesitaron convencerlos de la veracidad de las afirmaciones lanzadas, haciendo uso de procedimientos y pruebas matemáticas, casos similares se presentaron en Arreguín et al. (2012).

Los estudiantes fueron capaces de realizar autoevaluación y coevaluación en cada una de las sesiones, lo que les permitió evaluar sus avances y la dependencia de éste en el mejoramiento grupal. Aunque inicialmente no se sintieron muy cómodos con la idea de estas evaluaciones, a medida que avanzaban, encontraron el sentido y la importancia a sus propias construcciones, reflexionaron sobre desarrollo de las actividades y el comportamiento mostrado ante ciertas situaciones, lo que les permitió darse una valoración a conciencia. De forma semejante se encontró resultados en (Bernaza y Lee, SA) y (Pérez, 2017). A pesar de que, algunos estudiantes mostraron resistencia a la contribución de su propio conocimiento,

a medida que se autoevaluaban y avanzaban en las sesiones, se evidenció un cambio positivo que permitió la colaboración, la construcción de conocimientos y el fortalecimiento de relaciones interpersonales.

Los fuertes lazos creados a partir de la escogencia de grupos al azar para realizar actividades en el área de matemáticas permitieron, además, la creación permanente de grupos de estudio para abordar temáticas desde las diferentes áreas del conocimiento impartidas en la I.E NUSERO.

Además, se logró que los líderes del grupo experimental se hicieran responsable, no sólo de su propio aprendizaje; sino, también de sus compañeros de su grupo, alcanzaron una mejoría en la expresión oral, que se hizo necesaria para poder realizar la explicación de los contenidos en cada una de las sesiones trabajadas; así mismo, desarrollaron capacidades de tolerancia para entenderse, aceptar los aportes de los demás y llegar a acuerdos dentro del desarrollo de actividades. Estos resultados se asemejan a los encontrados en la investigación realizada por (Pano, 2015), (Pérez, 2017), (Bustos, SA) y (Bernaza y Lee, SA)

La utilización de las guías didácticas diseñadas utilizando la EAC mediada por ambientes de liderazgo, le facilitó a la docente orientadora, la enseñanza de los contenidos matemáticos estudiados en esta investigación, además, le permitió hacer una reflexión y cambios en sus prácticas pedagógicas; todo esto conllevó a una notable mejoría en su labor docente. Caso semejante se encontró en Ortiz (2015).

5. Conclusiones y recomendaciones

Finalmente se plantean algunas conclusiones y recomendaciones generales sobre el proceso evaluativo de las guías didácticas diseñadas y aplicadas teniendo en cuenta la utilización de la estrategia de aprendizaje colaborativo (EAC).

- Después de diagnosticar por medio de la prueba pretest el nivel de desarrollo del pensamiento matemático medido a través de los componentes geométrico métrico (CGEO) y aleatorio (CA), en los estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario, se encontró que los grupos son homogéneos y presentan un nivel de desempeño bajo en las competencias de: interpretación, representación, formulación, ejecución y argumentación. A pesar de que los estudiantes desconocían en gran parte la temática, mostraron algunos conocimientos básicos acerca de estos contenidos.
- Luego del diseño e implementación de guías didácticas utilizando la EAC mediada por un ambiente de liderazgo, se consiguió la realización de una autoevaluación por parte de cada individuo del grupo experimental, donde expresaron sus sentimientos durante el tratamiento y el grado de adquisición en la temática abordada. Los estudiantes cambiaron la forma de ver la matemática y la concepción de que ésta, sólo trabaja con números.
- La prueba no paramétrica de Mann Whitney, que se utilizó para comparar los resultados del grupo experimental con los del grupo control en la prueba postest, demostró que existen diferencias estadísticamente significativas entre los grupos, en cuanto al nivel de desarrollo de los componentes geométrico métrico y aleatorio, luego de intervenir el grupo experimental con la estrategia de aprendizaje colaborativo. Lo que permite concluir que la EAC mediada por un ambiente de liderazgo, fue más eficaz para aumentar el nivel de desarrollo del pensamiento matemático.
- La prueba no paramétrica de Wilcoxon, que se utilizó para comparar los resultados del grupo experimental antes y después de la intervención con la EAC, demostró que existen diferencias significativas entre los resultados del pretest y postest después de la intervención

con la EAC, en lo que respecta al nivel de desarrollo del CGEO y del CA. A pesar de que no hubo diferencias significativas en la competencia argumentación del CA, se demostró que, existió diferencia ente los rangos promedios, lo que indica que los estudiantes mejoraron notablemente en esta competencia, aunque no haya sido de manera significativa.

- El proceso investigativo demostró que la estrategia de aprendizaje colaborativo influyó de manera eficaz en el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario en el municipio de Valencia.
- La orientación para el trabajo individual realizado por los líderes, permitió que éstos, realizaran la búsqueda de información, tomaran decisiones, e hicieran la selección adecuada de la información requerida y su debido procesamiento, de manera que pudieran estar en condiciones de aportar sus reflexiones y consideraciones para el grupo.
- Esta investigación permite mostrar que en la I.E NUSERO se requiere capacitación docente en el diseño e implementación de estrategias didácticas; dado que, es importante que los maestros conozcan nuevas herramientas que faciliten no sólo la enseñanza, sino también, el aprendizaje por parte de los estudiantes.
- La I.E NUSERO precisa articular y actualizar el plan de estudio en el área de matemáticas, de modo que, éste sea desarrollado de manera eficiente y eficaz dentro del calendario académico.
- Se recomienda a la I.E NUSERO incluir esta propuesta educativa dentro de las estrategias pedagógicas del plan de estudio, no solo en el área de matemáticas, sino también, en todas las áreas del conocimiento impartidas en este plantel educativo.
- La estrategia utilizada en esta investigación se puede encaminar en el diseño de guías didácticas en otros contenidos matemáticos, y de esta manera, los estudiantes de las instituciones educativas del municipio de Valencia cuenten con una propuesta curricular con

base en la estrategia de aprendizaje colaborativo que les resulte eficaz para el aprendizaje de las matemáticas.

- En los ambientes de colaboración que se formaron, se logró que los estudiantes con menos habilidades para el aprendizaje de las matemáticas se sintieran aceptados por el grupo, lo cual permitió que se generara en ellos gran motivación por el estudio, ambientes de confianza, mejor expresividad y una buena organización de sus ideas al momento del discurso. Así mismo, se alcanzó una mejora en el rendimiento académico y mayores capacidades para trabajar en equipo.
- Este proceso de investigación permitió observar a través de los lazos de amistad que se generaron entre los integrantes de los grupos, una mejora en las relaciones interpersonales; surgiendo de esta manera, una fuerte motivación hacia el proceso de aprendizaje de la matemática, mayor fluidez en la comunicación, intercambio de conocimiento y materiales didácticos.
- Los estudiantes lograron utilizar de forma adecuada algunos organizadores cognitivos (mapa conceptual, cuadro sinóptico, diagrama de árbol) y otras herramientas que les permitieron la apropiación y transferencia de los contenidos matemáticos; situación esta, que no se evidenciaba con la estrategia de enseñanza - aprendizaje tradicional.
- A través de esta investigación se genera un valor agregado, dado que, las guías didácticas diseñadas y experimentadas en el área de matemáticas, sirven para el desarrollo de los contenidos en otras áreas del conocimiento.
- La investigación revela un valor agregado para la docente orientadora del proceso investigativo, dado que, logró la inclusión y aplicación de estrategias didácticas que le facilitaron la enseñanza de las matemáticas, cambios positivos en su práctica pedagógica y mejoras en su labor diaria.

LISTA DE ANEXOS

Anexo A. Carta a rector de la institución

Valencia, 10 de julio de 2.017

Licenciado

RUBÉN ENRIQUE TABOADA TORRES

Rector

Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario

E. S. D.

Cordial Saludo.

De manera muy atenta me dirijo a usted para comunicarle que me encuentro cursando tercer semestre de la Maestría en Educación en la Universidad de Córdoba, en el cual estoy realizando el trabajo de investigación titulado “*Influencia del aprendizaje colaborativo mediado por un ambiente de liderazgo, en el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de media académica*”, para el cual se hace necesario aplicar unos cuestionarios a los estudiantes con el objetivo de recolectar información diagnóstica y seguimiento a la estrategia aplicada en clase.

Por todo lo anterior, solicito permiso para llevar a cabo estas actividades de práctica educativa con los estudiantes de grado décimo de la institución.

De antemano agradezco la atención prestada y su oportuna respuesta.

LENIS JUDITH SIERRA LLORENTE

C.C. 25.801.660 de Montería

Docente del Área de Matemáticas.

Anexo B. Respuesta de la carta a rector de la institución



INSTITUCIÓN EDUCATIVA NUESTRA SEÑORA DEL ROSARIO

NIT: 812001998-5 DANE: 123855022006 Código ICFES: 114173



LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA NUESTRA SEÑORA DEL ROSARIO, DE VALENCIA - CÓRDOBA, ESTABLECIMIENTO EDUCATIVO OFICIAL, MODALIDAD ACADÉMICA, APROBADO SEGÚN RESOLUCIÓN No. 0005044 DE NOVIEMBRE 16 DEL 2000 Y CON APROBACIÓN DE LOS NIVELES PREESCOLAR, BÁSICA PRIMARIA Y BÁSICA SECUNDARIA; LA RESOLUCIÓN No. 0000972 DEL 15 DE DICIEMBRE DEL 2003 CONCEDE LICENCIA DE FUNCIONAMIENTO EN EL NIVEL DE EDUCACIÓN MEDIA ACADÉMICA Y RATIFICA LA RESOLUCIÓN No. 001631 DE FECHA 20 DE SEPTIEMBRE DEL 2002; LAS CUALES SON RATIFICADAS POR LA RESOLUCIÓN No. 207 DEL 08 DE JUNIO/2011; LA RESOLUCIÓN No. 001000 DE FECHA 18 DE MAYO DEL 2016, AUTORIZA LA AMPLIACIÓN DEL SERVICIO EDUCATIVO CON LA IMPLEMENTACIÓN DE LA JORNADA ÚNICA DE 40 HORAS SEMANALES PARA LOS NIVELES DE PREESCOLAR, BÁSICA Y MEDIA ACADÉMICA
VALENCIA - CÓRDOBA

Valencia, 12 de julio del 2017

Licenciada

Lenis Judith Sierra Llorente

Docente Área de Matemáticas

E. S. M.

Cordial saludo

Acepto que los estudiantes de la Institución Educativa a mi cargo, participen voluntariamente en la investigación dirigida por Lenis Judith Sierra Llorente Docente del Área de matemáticas y maestrante de la Universidad de Córdoba. He sido informado de que el objetivo de este estudio es realizar pruebas diagnósticas y seguimiento de los estudiantes acerca de su trabajo de investigación.

Reconozco que la información que los estudiantes brinden en el curso de esta investigación es estrictamente confidencial y no será usada para ningún otro propósito fuera de los de este estudio sin mi consentimiento.

Me suscribo de usted con sentimiento de aprecio

Atentamente,

RUBÉN ENRIQUE TABODA TORRES
C. C. No. 6.884.968 Expedida Montería - Córdoba
Rector

Anexo C. Consentimiento informado a padres de familia o acudientes

**CONSENTIMIENTO INFORMADO
PADRES O ACUDIENTES DE ESTUDIANTES**

Yo _____,
mayor de edad, [] madre, [] padre, [] acudiente o [] representante legal del estudiante
_____ de _____ años de edad, he
sido informado(a) acerca de las actividades de práctica educativa, las cuales se requieren para que la docente Lenis Judith
Sierra Llorente del área de matemáticas de mi hijo(a), maestrante de la Universidad de Córdoba, realice en su trabajo de
investigación “*Influencia del aprendizaje colaborativo mediado por un ambiente de liderazgo, en el desarrollo del
pensamiento matemático en estudiantes de media académica*” para optar al título de Magister en educación.

Luego de haber sido informado(a) sobre las condiciones de la participación de mi hijo(a) en las actividades de práctica
educativa y comprendido en su totalidad la información sobre esta actividad, entiendo que:

- La participación de mi hijo(a) en estas actividades y los resultados obtenidos por la docente en la investigación no tendrán repercusiones o consecuencias en sus actividades escolares, evaluaciones o calificaciones en el curso.
- La participación de mi hijo(a) en las actividades no generará ningún gasto, ni recibiremos remuneración alguna por su participación.
- Los resultados obtenidos durante la práctica educativa se utilizarán únicamente como evidencia del trabajo de investigación de la docente.

Atendiendo a la normatividad vigente sobre consentimientos informados, y de forma consciente y voluntaria

DOY EL CONSENTIMIENTO

NO DOY EL CONSENTIMIENTO

para la participación de mi hijo (a) en las actividades de práctica educativa propias del trabajo investigación de la docente en las instalaciones de la Institución Educativa donde estudia.

Fecha: _____

FIRMA MADRE
C. C.

FIRMA PADRE
C.C.

FIRMA ACUDIENTE O REPRESENTANTE LEGAL
C. C.

Anexo D. Prueba Pretest

Respetable estudiante; el presente cuestionario tiene como finalidad realizar un estudio de investigación en el área de matemáticas en la Universidad de Córdoba de la maestrante Lenis Judith Sierra Llorente. En virtud a lo anterior, se le agradece de forma muy especial su colaboración para responder las preguntas que encontrará a continuación. No está demás enfatizar que los datos que usted exponga, serán tratados con profesionalismo, discreción, responsabilidad y los resultados obtenidos no tendrán repercusiones o consecuencias en sus actividades escolares, evaluaciones o calificaciones en el curso, no generará ningún gasto, ni recibirá remuneración alguna por su participación, debido a que se utilizarán únicamente como evidencia del trabajo de investigación de la docente.

INSTRUCCIONES

Conteste los siguientes interrogantes con responsabilidad y honestidad de acuerdo con los conocimientos que tenga sobre la temática tratada. Elija la opción que considere correcta y rellene el ovalo en la hoja de respuestas.

1. En la tabla se presentan las cartas que conforman una baraja de póquer.

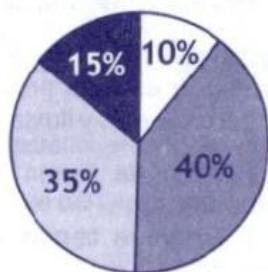
Si la probabilidad de escoger una de ellas que cumpla dos características determinadas es cero, estas características podrían:

- A. Ser una carta negra y ser un número par.
 B. Ser una carta roja y ser de picas.
 C. Ser una carta de corazones y ser un número impar.
 D. Ser la carta roja K y ser de diamantes.

	NEGRAS		ROJAS	
	Picas	Tréboles	Corazones	Diamantes
1	♠ A	♣ A	♥ A	♦ A
2	♠ 2	♣ 2	♥ 2	♦ 2
3	♠ 3	♣ 3	♥ 3	♦ 3
4	♠ 4	♣ 4	♥ 4	♦ 4
5	♠ 5	♣ 5	♥ 5	♦ 5
6	♠ 6	♣ 6	♥ 6	♦ 6
7	♠ 7	♣ 7	♥ 7	♦ 7
8	♠ 8	♣ 8	♥ 8	♦ 8
9	♠ 9	♣ 9	♥ 9	♦ 9
10	♠ 10	♣ 10	♥ 10	♦ 10
11	♠ J	♣ J	♥ J	♦ J
12	♠ Q	♣ Q	♥ Q	♦ Q
13	♠ K	♣ K	♥ K	♦ K

Tabla

2. Se realizó una encuesta a 2.000 clientes de una empresa de telecomunicaciones para saber cómo clasifican la calidad del servicio que reciben. La siguiente gráfica muestra los porcentajes de las calificaciones dadas por los clientes.



CALIFICACION DEL SERVICIO	
	MALO
	REGULAR
	BUENO
	EXCELENTE

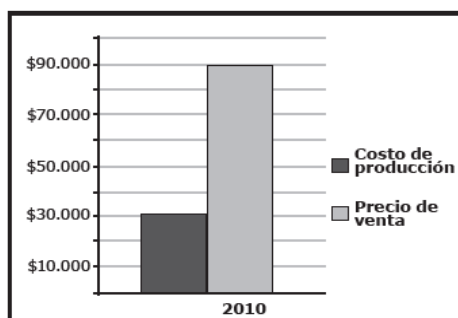
Cientes insatisfechos con el servicio

Cientes satisfechos con el servicio

La afirmación verdadera acerca de los resultados de la encuesta es:

- A. Más de 400 clientes consideran que la calidad del servicio que ofrece la empresa es excelente.
 B. Menos de 700 clientes consideran que la calidad del servicio que ofrece la empresa es regular.
 C. Menos de 900 clientes están satisfechos con el servicio que ofrece la empresa.
 D. Más de 600 clientes consideran que la calidad del servicio que ofrece la empresa es buena.
3. La gráfica muestra el costo de producción y el precio de venta de un videojuego (una unidad) en el año 2010. Por otro lado, la tabla muestra el número de videojuegos vendidos por una empresa del año 2008 al 2012.

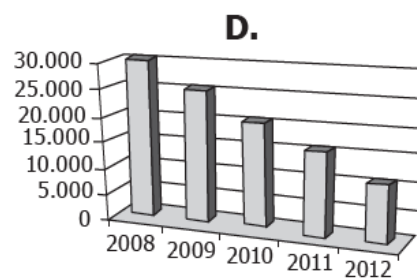
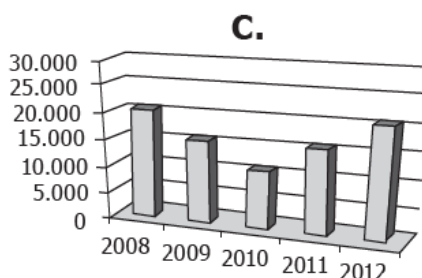
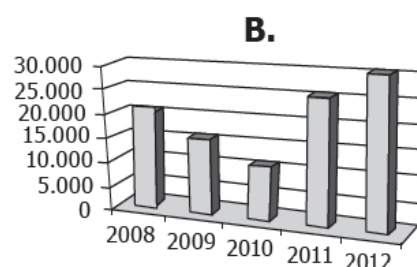
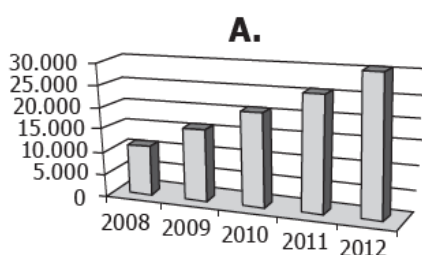
Con base en la información presentada, ¿cuál de las siguientes gráficas muestra el número de videojuegos vendidos durante el periodo 2008 - 2012?



Gráfica

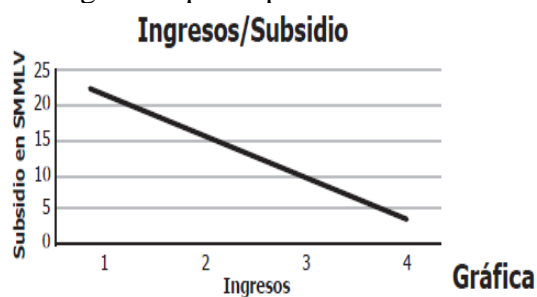
Año	Número de videojuegos vendidos
2008	20.000
2009	15.000
2010	10.000
2011	25.000
2012	30.000

Tabla



4. El subsidio familiar de vivienda (SFV) es un aporte que entrega el Estado y que constituye un complemento del ahorro, para facilitarle la adquisición, construcción o mejoramiento de una solución de vivienda de interés social al ciudadano. A continuación se presenta la tabla de ingresos en salarios mínimos mensuales legales vigentes (SMMLV) y el subsidio al que tiene derecho, para cierto año.

Una persona que observa la información de la tabla elabora la gráfica que se presenta a continuación.



Gráfica

Subsidio Familiar de Vivienda (SFV)				
Ingresos (SMMLV)		Valores \$		Valor de SFV en (SMMLV)
Desde	Hasta	Desde	Hasta	
0	1	0	535.600	22
1	1,5	535.601	803.400	21,5
1,5	2	803.401	1.071.200	21
2	2,25	1.071.201	1.205.100	19
2,25	2,5	1.205.101	1.339.000	17
2,5	2,75	1.339.001	1.472.900	15
2,75	3	1.472.901	1.606.800	13
3	3,5	1.606.801	1.804.600	9
3,5	4	1.804.601	2.142.400	4

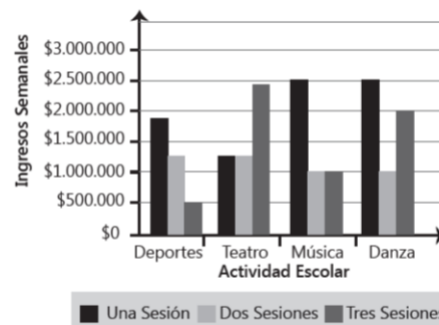
La gráfica presenta una inconsistencia porque

- los ingresos y el subsidio correspondientes se dan en miles de pesos, y no en SMMLV.
- la correspondencia entre ingresos y subsidios es inversa, pero no disminuye de manera constante y continua.
- faltan algunos valores de los subsidios presentados en la tabla.
- los valores del subsidio deben ser ascendentes, pues a menores ingresos, mayor es el subsidio.

5. Para mostrar los ingresos que recibe semanalmente el colegio por estos cursos se propone la siguiente gráfica.

La gráfica presenta una inconsistencia porque los ingresos recibidos de los asistentes a

- una sesión de deportes deben ser mayor que los de las otras actividades.
- 2 o 3 sesiones deben ser mayores en todas las actividades.
- danza y música deben ser los mismos sin importar las sesiones.
- 3 sesiones de deportes o música deben tener barras iguales.



6. Felipe juega con dos dados que tienen forma cúbica. Uno de ellos tiene 2 caras rojas, 2 blancas, una azul y otra verde. El otro dado tiene sus caras marcadas con los números 1,2,3,4,5 y 6 respectivamente.

La probabilidad de obtener cara verde y 5 al lanzar los dados es $\frac{1}{36}$.

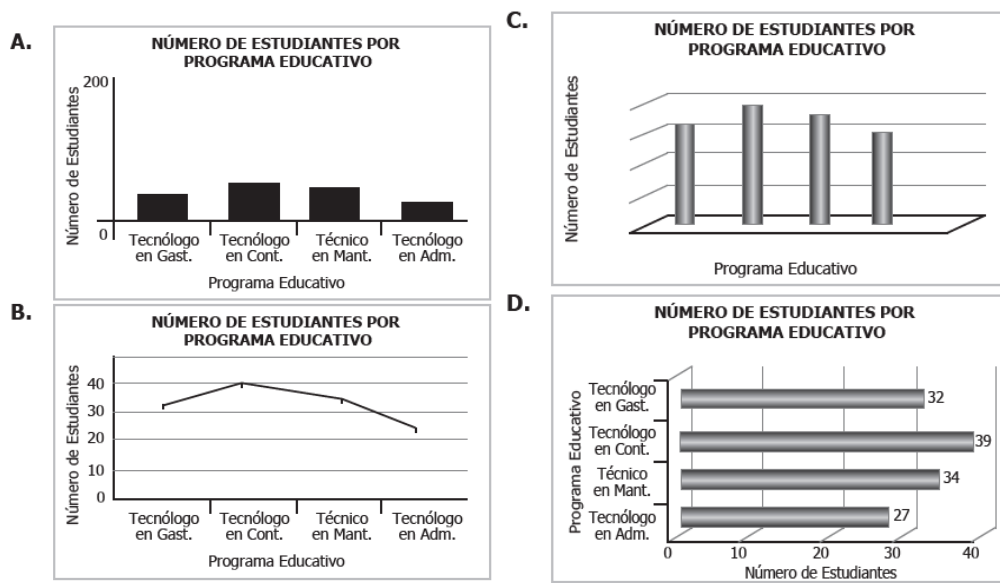
Si Felipe lanzó los dos dados simultáneamente sobre el experimento aleatorio, es correcto afirmar que

- solamente seis de los posibles eventos tienen probabilidades igual a $\frac{1}{18}$.
- la mitad de los posibles eventos tienen probabilidad igual a $\frac{1}{18}$.
- uno de los posibles eventos tiene probabilidad igual a $\frac{1}{72}$.
- todos los posibles eventos tiene probabilidad igual a $\frac{1}{36}$.

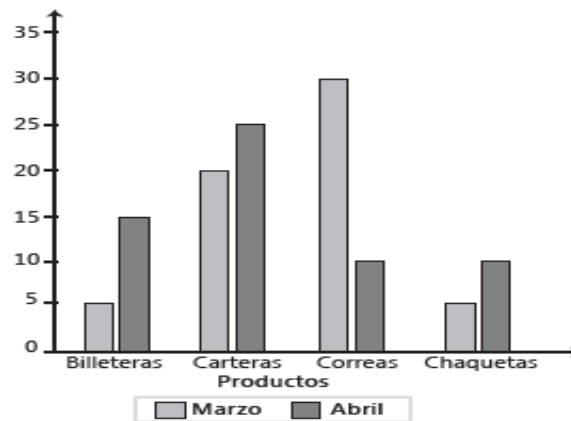
7. En la siguiente tabla se registra la información reportada por un municipio de Colombia, sobre la cantidad de estudiantes de algunos programas educativos que ofrece una institución de enseñanza.

TITULO QUE OTORGA EL PROGRAMA EDUCATIVO	CANTIDAD DE ESTUDIANTES
Tecnólogo en Gastronomía	32
Tecnólogo en Contabilidad y Finanzas	39
Técnico en Mantenimiento de Motores de Gasolina y de Gas	34
Tecnólogo en Administración Hotelera	27

La gráfica que mejor representa la información de la tabla es:



8. La gráfica muestra la cantidad de productos vendidos en una tienda, en marzo y abril.



Para calcular el cambio porcentual del número de venta de un producto, se toma el valor absoluto de la diferencia entre las cantidades de unidades vendidas en marzo y en abril, se divide entre el número de unidades vendidas en marzo y se multiplica por 100.

El producto que tuvo un mayor cambio porcentual entre los dos meses fue:

- Correas.
- Chaquetas.
- Billeteras.
- Carteras.

9. El propietario de una miscelánea solicita cotizaciones a dos papelerías, A y B, sobre los productos que habitualmente vende. Recibe la información que muestra la tabla.

<i>Papelería A</i>				<i>Papelería B</i>			
Cantidad	Producto	Costo Unitario (depende de las unidades compradas)	Costo total	Cantidad	Producto	Costo Unitario	Costo total
1.500	Esferos	de 1 a 1000 → \$ 1.000 de 1001 a 2000 → \$ 800 más de 2001 → \$ 600	\$ 1.200.000	1.500	Esferos	\$ 700	\$ 1.050.000
1.000	Marcador borrable	de 1 a 800 → \$ 2.500 de 801 a 1600 → \$ 2.200 más de 1601 → \$ 2.000	\$ 2.200.000	1.000	Marcador borrable	\$ 2.300	\$ 2.300.000
2.000	Marcador permanente	de 1 a 2000 → \$ 1.500 de 2001 a 4000 → \$ 1.400 más de 4001 → \$ 1.200	\$ 3.000.000	2.000	Marcador permanente	\$ 1.400	\$ 2.800.000
1.000	Lápiz	de 1 a 2000 → \$ 800 de 2001 a 4000 → \$ 850 más de 4001 → \$ 700	\$ 800.000	1.000	Lápiz	\$ 800	\$ 800.000

Considerar que el costo de adquirir 1.500 marcadores borrables en la papelería A, equivale a adquirir 1.650 marcadores borrables en la misma papelería, es una afirmación:

- Correcta, porque 1.500 marcadores, cada uno por 2.000 pesos, es igual a 1.650 marcadores por 2.200 pesos cada uno.
- Incorrecta, porque si aumenta la cantidad comprada el precio unitario es de \$2.000.
- Correcta, porque 1.500 marcadores, cada uno por 2.200 pesos, es igual a 1.650 marcadores por 2.000 pesos cada uno.
- Incorrecta, porque el precio unitario de cada marcador borrable es \$2.200.

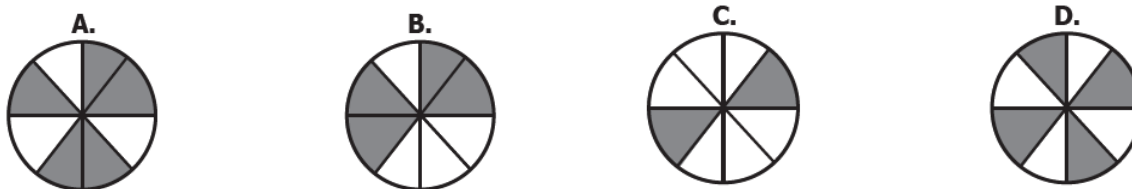
10. Para conocer cuántos estudiantes cumplen los requisitos para participar en una competencia deportiva, se les preguntó la edad a cinco (5) de ellos, a partir de esta información se determinó que:

- Los cinco estudiantes son mayores de 15 años.
- Los cinco estudiantes se clasifican en tres edades distintas.
- La moda de los cinco datos es 18 años.
- En promedio los cinco estudiantes tienen 17, 4 años.

¿Cuáles de las siguientes parejas de números representan la menor y la mayor edad respectivamente?

- 18 y 20 años.
- 18 y 19 años.
- 16 y 18 años.
- 16 y 17 años.

11. Se quiere construir una ruleta para un juego de azar en la que haya dos opciones: blanco y gris. Se quiere que el gris sea más probable que el blanco. ¿Cuál de las siguientes ruletas cumple lo que se requiere?



12. En la prueba final de las olimpiadas en matemáticas de una institución, clasificaron 4 estudiantes. Los que obtengan los dos primeros puestos en la prueba se destacarán en un cuadro de honor. Los procedimientos propuestos para hallar los dos primeros puestos son:

- I. Listar y contar las parejas ordenadas de diferentes maneras que se puedan organizar con un grupo de 4 estudiantes
- II. Multiplicar el número de estudiantes que podrían ocupar el primer puesto por el número de estudiantes que podrían ocupar el segundo puesto, una vez ocupado el primero
- III. Encontrar el número de formas diferentes en que se pueden organizar 4 personas

¿Cuál o cuáles procedimiento(s) permiten encontrar el número de maneras diferentes de conformar el cuadro de honor?

- A. I solamente
- B. III solamente
- C. I y III solamente
- D. II y III solamente

Responde las preguntas 13 y 14 de acuerdo a la siguiente información

En un boletín sobre el consumo cultural de un país se publicó el resultado de una encuesta, respecto al número y porcentaje de hombres y mujeres de 12 años de edad o más, que en los últimos 12 meses afirmaron leer libros y revistas (ver tabla 1), y la frecuencia con que leen libros tanto hombres como mujeres (ver tabla 2). Los hombres y mujeres que respondieron para la categoría Libros son los mismos que respondieron para la categoría *Revistas*.

Total número y porcentaje de personas que afirmaron leer libros y revistas.

Lectura de libros y revistas		Año 2012			
		Hombres	%	Mujeres	%
Libros	Sí	5.793	45,4	7.207	51,3
	No	6.952	54,6	6.846	48,7
Revistas	Sí	5.651	44,3	7.849	55,8
	No	7.094	55,7	6.204	44,2

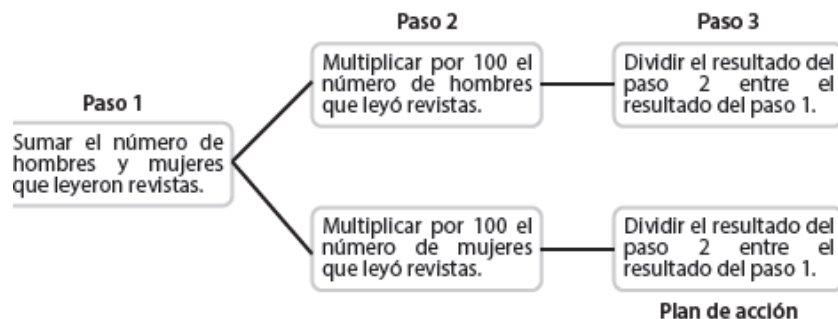
Tabla 1

Frecuencia de lectura de libros en los últimos 12 meses

Frecuencia de lectura de libros	Total	Hombres	Mujeres
Todos los días	6.960	3.003	3.957
Una vez al mes	4.037	1.890	2.147
Por lo menos una vez al año	2.003	900	1.103

Tabla 2

13. En el siguiente plan de acción se establece como hallar el porcentaje de hombres y mujeres que leyeron revistas.



Después de ejecutarlo se encontró que el porcentaje de hombres y mujeres que leen revistas es:

- A. 45% y 55%, respectivamente.
- B. 58% y 42%, respectivamente.
- C. 55% y 45%, respectivamente.
- D. 42% y 58%, respectivamente.

14. Una persona lee el boletín y desea saber cuál fue el número total de hombres y mujeres que respondieron la encuesta. ¿Qué datos debe usar?
- A. Hombres y mujeres que leyeron y no leyeron libros y revistas.
 - B. Hombres y mujeres que leyeron libros y revistas.
 - C. Hombres y mujeres que leyeron y no leyeron libros.
 - D. Hombres y mujeres que leyeron solamente libros.

15. La Tabla 1 muestra la medida de la cintura, en cm, y las tallas de pantalones correspondientes

Tabla 1

Medida de la cintura en cm	72-76	80-84	88-92	96-100
Talla de su cintura	S	M	L	XL

La Tabla 2 muestra la medida de la cintura de Rafael quien ha subido y bajado de peso durante los últimos 10 meses

Tabla 2

Cantidad de meses	2	1	2	5
Medida de la cintura en cm	95	80	90	88

La talla promedio de Rafael ha sido

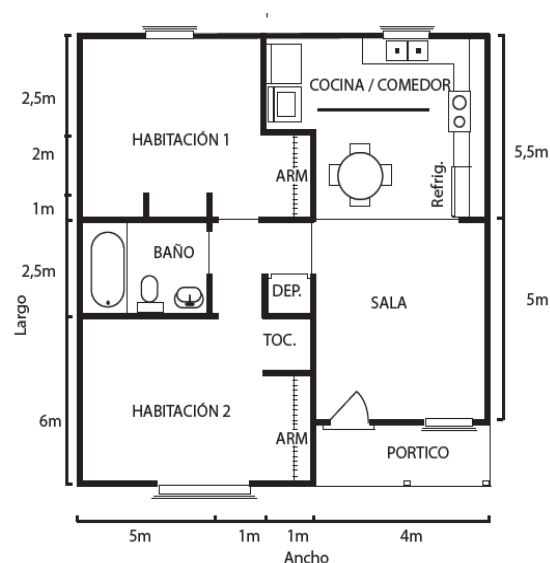
- A. S
- B. M
- C. L
- D. XL

16. El diagrama de la figura muestra los planos de una casa de 154 m²; las líneas más gruesas son paredes y las líneas delgadas, límites imaginarios de las divisiones de la casa. En la construcción hay 2 habitaciones, un baño, una sala y una cocina/comedor. Cada una de las medidas está dada en metros (m). Las siglas ARM, DEP y TOC denotan armario o clóset,

depósito y tocador, respectivamente. Se asume que cada armario y cada tocador forman parte de la habitación donde se ubican

¿Cuál de los siguientes conjuntos de medidas se requiere para calcular el área que ocupan en total el baño y el pórtico?

- Área de las habitaciones 1 y 2, de la sala, de la cocina/comedor y del total de la casa.
- Ancho del baño y del pórtico, largo del baño y de la casa por la izquierda y la derecha.
- Área total de la casa, la sala y la cocina/comedor, ancho de la habitación 2 y de la casa.
- Largo de la habitación 2, de su clóset y del baño, ancho inferior de la cocina y del baño.



17. El área de un triángulo equilátero se puede hallar solamente conociendo la longitud de sus lados. Para esto se usa la fórmula.

$$\frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

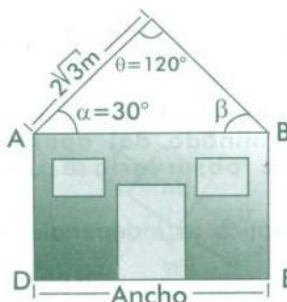
Donde l representa el lado del triángulo. El área de un triángulo equilátero de lado 2 es:

- $\sqrt{3}$
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 3
- $\frac{3}{4}$

18. La figura nos muestra que la vista frontal de una casa ABED es un rectángulo, donde el ángulo α mide 30° y es congruente con el ángulo β . Además, el ángulo θ mide 120°

¿Cuánto mide el ancho de la casa?

- 3m
- 4m
- 5m
- 6m



$$\begin{aligned} \text{Sen } 30^\circ &= \frac{1}{2} & \text{Cos } 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{Sen } 120^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{Cos } 120^\circ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

19. El movimiento de una partícula P_1 se puede representar mediante la ecuación $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$ y el movimiento de otra partícula P_2 con la ecuación $4X^2 + 9Y^2 + 32X - 18Y + 37 = 0$.

Respecto al movimiento de las partículas, es correcto afirmar que

- A. P_1 describe una hipérbola y P_2 una parábola.
- B. P_1 describe una parábola y P_2 una elipse.
- C. P_1 describe una hipérbola y P_2 una elipse.
- D. P_1 describe una elipse y P_2 una hipérbola

20. Las ecuaciones de dos circunferencias C_1 y C_2 son respectivamente:

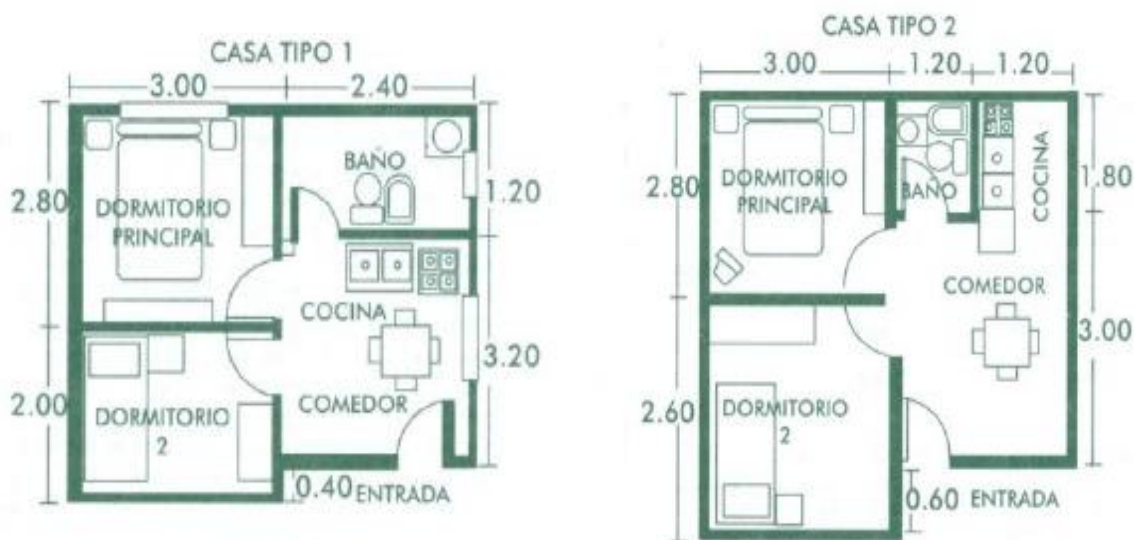
$$(x - 2)^2 + y^2 = 1 \quad \text{y} \quad (x - 5)^2 + y^2 = 4$$

Acerca de las circunferencias C_1 y C_2 es correcto afirmar que:

- A. Son tangentes.
- B. Son concéntricas.
- C. Se cortan en dos puntos.
- D. No tienen puntos en común.

Responde las preguntas 21 y 22 de acuerdo a la siguiente información

En un plan de vivienda de interés social, una constructora ofrece dos tipos de casa de acuerdo con los siguientes planos

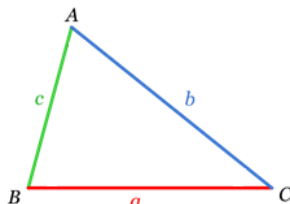


21. Observando los planos de las casas tipo 1 y tipo 2 es correcto afirmar que el área de la casa tipo 1 es aproximadamente
- A. 1 m^2 mayor que el área de la casa tipo 2.
 - B. 1 m^2 menor que el área de la casa tipo 2.
 - C. 3 m^2 mayor que el área de la casa tipo 2.
 - D. 3 m^2 menor que el área de la casa tipo 2.
22. Un comprador de la casa tipo 1 pide que el espacio destinado para la entrada sea aprovechado para ampliar el área del comedor. El área ganada equivale a:
- A. la tercera parte del área del baño.
 - B. la quinta parte del área del dormitorio 2.

- C. la sexta parte del área del baño.
 D. la séptima parte del área del dormitorio principal.

Responde las preguntas 23 y 24 de acuerdo a la siguiente información

En un triángulo ABC como el que muestra la figura, a, b, y c corresponden a las longitudes de los lados.



Los siguientes teoremas relacionan los lados y ángulos de un triángulo ABC cualquiera

TEOREMA DEL SENO

$$\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}B}{b} = \frac{\text{Sen}C}{c}$$

TEOREMA DEL COSENO

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{Cos}A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \text{Cos}B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{Cos}C$$

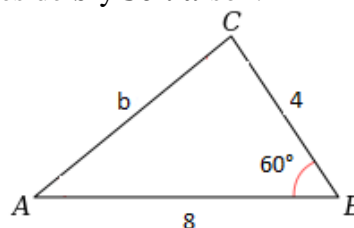
RECUERDE

$$\text{Sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$$

23. En el triángulo que muestra la figura los valores de b y $\text{Sen } \alpha$ son:

- A. $b = 4\sqrt{2}$ y $\text{Sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$
 B. $b = 4\sqrt{2}$ y $\text{Sen } \alpha = \frac{1}{2}$
 C. $b = 4\sqrt{3}$ y $\text{Sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$
 D. $b = 4\sqrt{3}$ y $\text{Sen } \alpha = \frac{1}{2}$



24. Se quiere calcular la distancia entre dos puntos, P y Q, pero hay un muro entre ellos. Con una cinta métrica, se comprueba que la distancia de P a cierto punto R es $12m$ y la distancia de Q a R es $15m$. También se sabe que el ángulo formado por los segmentos PR y QR es 60° . ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a la distancia entre P y Q?

- A. $15 \frac{\sqrt{3}}{2}$
 B. $6\sqrt{3}$
 C. $\sqrt{189}$
 D. $\sqrt{549}$

25. La figura 1 muestra la fotografía de un túnel en el que se resaltan algunas curvas parabólicas; la figura 2 representa estas curvas en el plano cartesiano.



Figura 1

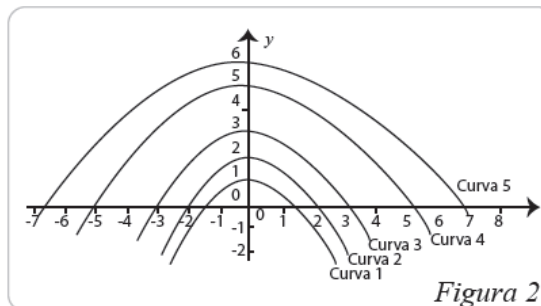


Figura 2

La curva 1 se describe con la ecuación $y - 1 = -\frac{1}{2}x^2$; al transformarla, se obtiene la ecuación $y - 6 = -\frac{1}{8}x^2$ que describe a la curva.

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5

26. Un polígono es convexo si contiene todos los posibles segmentos de recta que se puedan unir entre un par de puntos pertenecientes a su superficie, sin que los segmentos corten un lado o salgan de la figura.

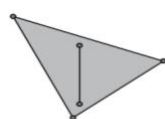


Figura 1. Polígono convexo

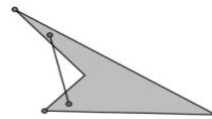


Figura 2. Polígono no convexo

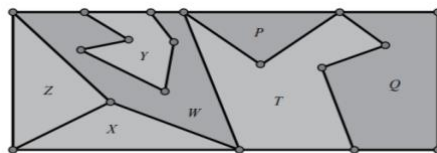


Figura 3

En el anterior cuadro compuesto por los polígonos Q, P, Y, T, W, X y Z, ¿cuáles polígonos son **NO** convexos?

- A. W, X, Y, Z.
- B. Q, T, W, Y.
- C. P, T, Y, Z.
- D. P, T, W, X

27. Para construir una cerca alrededor de un terreno rectangular, se tomaron las siguientes medidas:

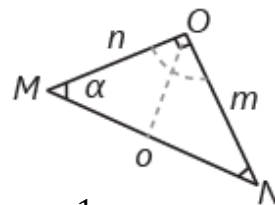
- Medida del ancho: 20m.
- Medida del perímetro: 5m.

Estas medidas son incorrectas porque:

- A. el perímetro es la suma de los lados y, por tanto, debe ser mayor que cada uno de estos.
- B. como el ancho es el cuádruple del perímetro, significa que los cuatro lados son iguales.

- C. al elevar el perímetro al cuadrado, no se obtiene el valor del ancho.
 D. no se conoce la longitud del largo y, por tanto, es imposible conocer el perímetro

28. La figura muestra el triángulo rectángulo MON.



En los triángulos rectángulos se define:

$$\text{Sec } \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \text{ y } \text{csc} = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

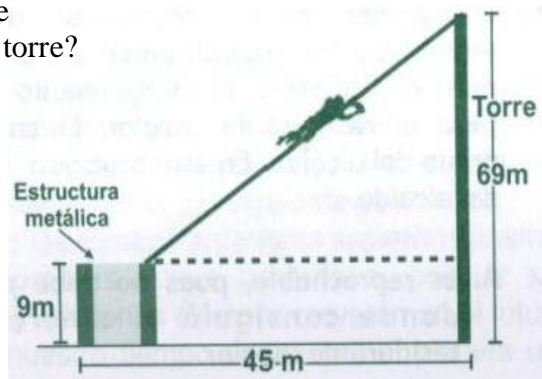
¿De las siguientes expresiones, cuál equivale a $\frac{\text{sec } \alpha}{\text{csc } \alpha}$?

- A. $\frac{1}{m} \div \frac{1}{n}$
 B. $\frac{n}{m}$
 C. $\frac{m}{n}$
 D. $\frac{o}{n} \times \frac{o}{m}$

29. Un acróbata se lanza desde una torre pendiente de un cable metálico al centro de una plaza. En el centro de la plaza se instaló una estructura de metal de 9 metros de alto, de donde se sujetó el cable que se encuentra asegurado también a la torre. La altura de la torre es de 69 metros y la distancia de la torre al centro de la plaza es de 45 metros.

¿Cuál de las siguientes expresiones nos permite determinar el ángulo que forma el cable con la torre?

- A. $\text{Arc cot} \left(\frac{69}{45} \right)$
 B. $\text{Arc tan} \left(\frac{69}{45} \right)$
 C. $\text{Arc cot} \left(\frac{45}{60} \right)$
 D. $\text{Arc tan} \left(\frac{45}{60} \right)$



30. Para obtener una elipse al cortar un sólido con un plano, es necesario que el corte se haga a un
 A. cono y pase transversal por la base.
 B. cono y sea paralelo a la base.
 C. cilindro y no pase por las bases.
 D. cilindro y sea paralelo a las bases.

Se le agradece su valiosa participación en este estudio de investigación.

Anexo E. Test para determinar condición de liderazgo

APELLIDOS: _____ NOMBRES: _____

FECHA: _____

Este cuestionario tiene como objetivo conocer tus ideas sobre el desarrollo de liderazgo en estudiantes. Encontrarás oraciones que describen comportamientos y opiniones relacionadas al liderazgo.

INSTRUCCIONES

*Lee atentamente y evalúa lo más honestamente cada oración, pensando en cómo eres y qué sueles hacer ante las situaciones que se te presentan dentro del aula. Piensa que cada oración debe describirte tal como eres ahora y no como desearías ser en el futuro. Luego, marca la opción que mejor describe lo que crees. **Recuerda que no hay respuestas buenas ni malas.***

Lee cuidadosamente cada oración y marca el número que corresponda

<i>Nunca</i>	<i>Casi nunca</i>	<i>A veces</i>	<i>Casi siempre</i>	<i>Siempre</i>
IX	2	3	4	5

No olvides contestar todas las preguntas. Marca solo una respuesta por cada oración.

Nº	PREGUNTAS	<i>Nunca</i>	<i>Casi nunca</i>	<i>A veces</i>	<i>Casi siempre</i>	<i>Siempre</i>
1	Mis compañeros imitan la forma cómo expongo en clases.	1	2	3	4	5
2	Animo a mis compañeros para terminar con la tarea que tienen que hacer.	1	2	3	4	5
3	Me atrevo a probar nuevas maneras de resolver problemas.	1	2	3	4	5
4	Suelo hacer comentarios positivos a mis compañeros sobre sus trabajos para que mejoren	1	2	3	4	5
5	Hago propuestas creativas para realizar trabajos grupales.	1	2	3	4	5
6	Trato de ponerme en el lugar del otro antes de dar mi opinión.	1	2	3	4	5
7	Mi opinión es clave para decidir sobre qué tema realizamos un trabajo grupal.	1	2	3	4	5
8	Cuestiono procedimientos para encontrar otras formas de solucionar problemas.	1	2	3	4	5
9	Transmito optimismo a mis compañeros cuando tienen un problema.	1	2	3	4	5
10	Cuando participo en clase, mis compañeros escuchan atentamente.	1	2	3	4	5
11	Al expresar mis ideas trato de no herir los sentimientos de otros.	1	2	3	4	5
12	Cuando propongo una idea, mis compañeros escuchan lo que tengo que decir.	1	2	3	4	5
13	Estoy comprometido a alcanzar las metas que nos propongamos como grupo.	1	2	3	4	5
14	Me esfuerzo al máximo para cumplir las metas grupales.	1	2	3	4	5

15	Cuando considero que las acciones de otros no son correctas, trato de explicarles que hay otras formas de hacer las cosas mejor	1	2	3	4	5
16	Motivo a mis compañeros para que se comprometan a lograr las metas grupales.	1	2	3	4	5
17	Cuando un miembro del grupo no quiere hacer su parte, converso con él y lo convengo para que se enfoque en la meta.	1	2	3	4	5
18	Muestro una actitud positiva ante las ideas nuevas de otros.	1	2	3	4	5
19	Les explico a mis compañeros cómo resolver una tarea cuando no la entienden.	1	2	3	4	5
20	Mis compañeros se comprometen y cumplen la tarea cuando yo soy parte del grupo.	1	2	3	4	5
21	Ayudo a mis compañeros para que consigan mejores resultados.	1	2	3	4	5
22	Ayudo a que los demás identifiquen sus errores para mejorar.	1	2	3	4	5
23	Respeto las opiniones de los otros, aunque yo no esté de acuerdo.	1	2	3	4	5
24	Comento a mis compañeros la importancia de lo que hacemos en las clases.	1	2	3	4	5
25	Me es fácil decir lo que pienso sin ofender a nadie.	1	2	3	4	5
26	Cuando alguno de mis compañeros no entiende la utilidad de las tareas que nos dejan en el colegio, trato de explicársela.	1	2	3	4	5
27	Animo a mis compañeros para arriesgarse a poner en práctica nuevas ideas en sus propios trabajos	1	2	3	4	5
28	Escucho las ideas de los demás y las tomo en cuenta cuando tengo que tomar decisiones.	1	2	3	4	5

Muchas gracias por tu valiosa colaboración.

Anexo F. Guías didácticas a desarrollar en el grupo experimental.

A continuación, se presentan la planeación de cada una de las sesiones con sus respectivas actividades.

Guía didáctica N°1

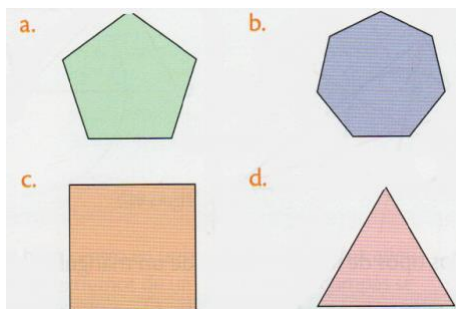
ÁREA Y/O ASIGNATURA		GRADO	PERIODO	TIEMPO
MATEMÁTICAS		10	4	4 horas de clase
ESTÁNDARES O PROCESOS DE APRENDIZAJE				
<p>Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.</p> <p>Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).</p> <p>Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas</p>				
COMPONENTE(S)			COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	
Geométrico métrico			Interpretación y representación Formulación y ejecución Argumentación	
DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE				
N°	ENUNCIADO		EVIDENCIAS	
NA	No aplica		No aplica	
CONTENIDOS		OBJETIVO DE LAS CLASES	MATERIAL DIDÁCTICO	
TEMA	SUBTEMA			
Polígonos	• Clasificación de polígonos	Identificar distintas clases de polígonos	Regla, escuadra, transportador, compás, cartulina, palos de pinchos, colbón	
	• Polígonos regulares e irregulares	Determinar área de polígonos		
	• Área de polígonos	Identificar poliedros		
	• Poliedros	Usar representaciones geométricas para resolver problemas.		
• Área de poliedros				
ACCIONES METODOLÓGICAS EN EL AULA				
EXPLORACIÓN	ESTRUCTURACIÓN	PRÁCTICA	TRANSFERENCIA	
Reconocimiento de saberes previos frente al componente (temáticas), competencias (Habilidades y destrezas) y propósito de aprendizaje. Este momento puede desarrollarse desde diversas estrategias metodológicas y a través de distintos estímulos que abordan la realidad del estudiante (lecturas, videos, preguntas problematizadoras, canciones, entre otras.)	Conceptualización y modelación frente al eje temático y objetivo de aprendizaje Ejecución (acciones de aprendizaje según el uso de materiales educativos y el objetivo de aprendizaje) En esta etapa se busca relacionar a los individuos con los nuevos conceptos o conocimientos, esto puede hacerse desde situaciones problemáticas en las que el estudiante se da cuenta que lo que sabe no es suficiente para resolver los cuestionamientos que se le proponen.	En este momento se inicia con actividades que propicien la relación del estudiante con el nuevo conocimiento. Es importante generar en el estudiante un desequilibrio cognitivo que puede partir de discusiones, debates, lluvia de ideas, juegos, entre otros; permitiéndole confrontar su saber con el de sus compañeros En estas actividades se fomentan habilidades superiores del pensamiento como el análisis, la síntesis y la abstracción. Algunas maneras de realizar este trabajo	Conceptualización y modelación frente al eje temático y objetivo de aprendizaje Ejecución (acciones de aprendizaje según el uso de materiales educativos y el objetivo de aprendizaje) En este momento el estudiante evidencia la aplicación del nuevo conocimiento y las habilidades desarrolladas en situaciones contextualizadas de la vida diaria. Esto es lo que de cierta manera podría denominarse un trabajo colaborativo por competencias en el que se interpreta la realidad, se usa el nuevo aprendizaje y sobre todo se reconoce su utilidad.	

		pueden ser los mapas mentales, cuadros sinópticos y otras herramientas metacognitivas que puedan dar cuenta del proceso de aprendizaje de los sujetos involucrados en el proceso.	
EVALUACIÓN FORMATIVA			
COEVALUACIÓN		AUTOEVALUACIÓN	
<p>Para la coevaluación el estudiante líder debe responder algunos de los siguientes ítems para evaluar a cada uno de los miembros de su grupo de trabajo.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Participó activamente en el desarrollo del trabajo colaborativo • Solicitó de manera respetuosa ayuda cuando tuvo dificultades • Realizó aportes a la construcción de conocimientos • Realizó la consulta de los contenidos por cuenta propia • Brindó ayuda a sus compañeros cuando estos le requirieron • Participó responsable y activamente en la construcción de su propio aprendizaje y el desarrollo de la actividad propuesta en la guía • Aceptó de manera respetuosa la crítica de sus compañeros cuando no cumplió con sus responsabilidades o tuvo dificultades para comprender el contenido 		<p>Para la autoevaluación cada miembro exceptuando al líder, debe responder los siguientes ítems:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Escuché y valoré el trabajo de mi compañero • Participé activamente en el trabajo colaborativo • Pedí respetuosamente ayuda para comprender el contenido cuando fue requerido • Aporté ideas, fuentes de consulta u otros materiales de apoyo • Ayudé a mis compañeros cuando les fue difícil comprender la temática abordada • Participé responsablemente en la construcción de mi propio aprendizaje • Tuve un trato amable y respetuoso con mis compañeros durante las reuniones de trabajo • Participé activamente en el desarrollo de la actividad propuesta en la guía didáctica • Acepté de manera responsable y respetuosa la crítica de mis compañeros cuando no cumplí con mis responsabilidades y me fue difícil la comprensión del tema. • ¿Cómo puedo mejorar para futuros encuentros de trabajo con mis compañeros? 	

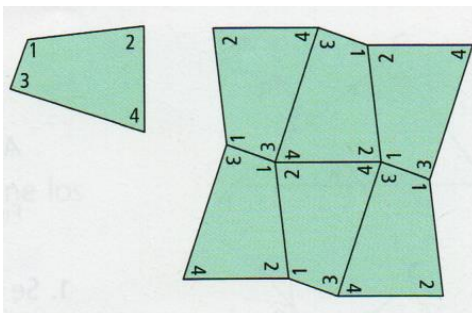
Actividad N°1

Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

1. Observa detenidamente los siguientes polígonos regulares y determina si es posible teselar con ellos una superficie.

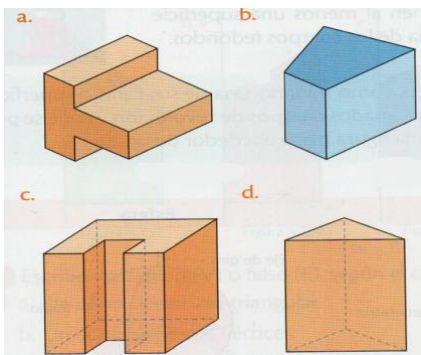


2. Observa el cuadrilátero asimétrico y analiza la forma en la que se acomodan los ángulos para que dicho polígono tesele una superficie

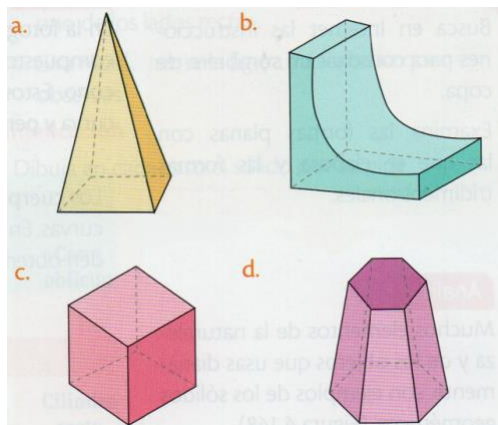


Escribe una conclusión en relación con los ángulos del cuadrilátero anterior y los recubrimientos de superficie.

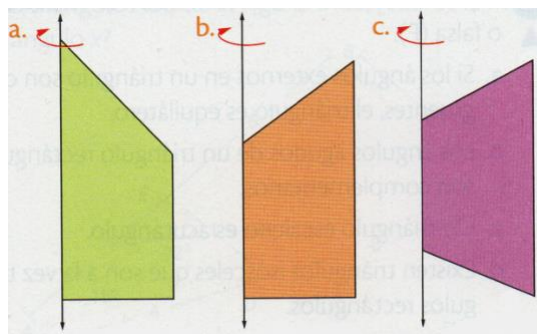
3. Determina si los siguientes poliedros son cóncavos o convexos.



4. ¿Qué tipo de poliedro es cada sólido?



5. Dibuja los cuerpos geométricos que se obtienen al girar las siguientes figuras



6. Experimenta la forma de obtener los sólidos en revolución. Para ello:
- Elabora un rectángulo, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un trapecio rectángulo usando cartulina.
 - Ubica un palo de pincho o un pitillo sobre uno de los lados rectos.
 - Gira rápidamente la figura y escribe lo que observas.
7. Escribe (V) si las afirmaciones son verdaderas o (F) si son falsas.
- Un cilindro tiene dos bases
 - Un cilindro no es un poliedro
 - Al aumentar el radio de un cono aumenta el sector circular de su desarrollo lateral
 - Al girar un triángulo rectángulo alrededor de su hipotenusa se obtiene un cono
8. Con el contenido de una caja de harina se pueden preparar 8 tortillas de 25 cm de diámetro. La abuela de Camilo cree que las tortillas de ese tamaño son demasiado grandes para sus nietos y por ello decide prepararlas con solo 5 cm de diámetro.
¿Cuántas tortillas de ese tamaño puede preparar con todo el contenido de la caja?
9. Un pegante se prepara en un recipiente de forma semiesférica que tiene un radio de 180 cm. Ese pegante debe ser envasado en botellas cilíndricas de 1 cm de radio en su base y una altura de 4 cm. ¿Cuántas botellas de esas características son necesarias para envasar la totalidad del pegante?. Toma $\pi = 3$.
10. Una aplanadora tiene un rodillo de 1,20 m de diámetro y 2,30 m de largo. ¿Qué superficie de tierra aplanada en cada vuelta del rodillo?.

Guía didáctica N°2

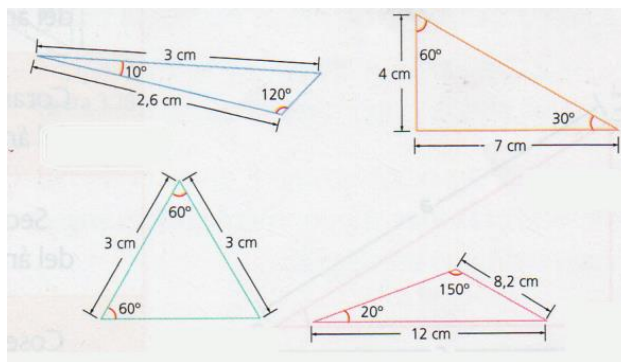
ÁREA Y/O ASIGNATURA		GRADO	PERIODO	TIEMPO
MATEMÁTICAS		10	4	8 horas de clase
ESTÁNDARES O PROCESOS DE APRENDIZAJE				
Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.				
Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.				
Describo y modelo fenómeno periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.				
COMPONENTE(S)			COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	
Geométrico métrico			Interpretación y representación Formulación y ejecución Argumentación	
DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE				
N°	ENUNCIADO	EVIDENCIAS		
4	Comprende y utiliza funciones para modelar fenómenos periódicos y justifica las soluciones.	<p>Reconoce el significado de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo para ángulos agudos, en particular, seno, coseno y tangente.</p> <p>Explora, en una situación o fenómeno de variación periódica, valores, condiciones, relaciones o comportamientos, a través de diferentes representaciones.</p> <p>Calcula algunos valores de las razones seno y coseno para ángulos no agudos, auxiliándose de ángulos de referencia inscritos en el círculo unitario.</p> <p>Reconoce algunas aplicaciones de las funciones trigonométricas en el estudio de fenómenos diversos de variación periódica, por ejemplo: movimiento circular, movimiento del péndulo, del pistón, ciclo de la respiración, entre otros.</p> <p>Modela fenómenos periódicos a través de funciones trigonométricas.</p>		
CONTENIDOS		OBJETIVO DE LAS CLASES	MATERIAL DIDÁCTICO	
TEMA	SUBTEMA			
Razones trigonométricas	<ul style="list-style-type: none"> • Triángulos • Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo • Razones trigonométricas de ángulo especiales • Resolución de triángulos rectángulo • Ángulos de elevación y depresión • Teorema del seno • Teorema de coseno 	<p>Reconocer el significado de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo para ángulos agudos, en particular, seno, coseno y tangente.</p> <p>Calcular algunos valores de las razones seno y coseno para ángulos no agudos, auxiliándose de ángulos de referencia inscritos en el círculo unitario.</p> <p>Reconocer algunas aplicaciones de las funciones trigonométricas en el estudio de fenómenos diversos de variación periódica.</p> <p>Modela fenómenos periódicos a través de funciones trigonométricas.</p>	Regla, escuadra, transportador, calculadora científica	
ACCIONES METODOLÓGICAS EN EL AULA				
EXPLORACIÓN	ESTRUCTURACIÓN	PRÁCTICA	TRANSFERENCIA	
Reconocimiento de saberes previos frente al componente (temáticas), competencias (Habilidades y destrezas) y propósito de aprendizaje. Este momento puede desarrollarse desde diversas estrategias metodológicas y	Conceptualización y modelación frente al eje temático y objetivo de aprendizaje Ejecución (acciones de aprendizaje según el uso de materiales educativos y el objetivo de aprendizaje)	En este momento se inicia con actividades que propicien la relación del estudiante con el nuevo conocimiento. Es importante generar en el estudiante un desequilibrio cognitivo	Conceptualización y modelación frente al eje temático y objetivo de aprendizaje Ejecución (acciones de aprendizaje según el uso de materiales educativos y el objetivo de aprendizaje)	

a través de distintos estímulos que abordan la realidad del estudiante (lecturas, videos, preguntas problematizadoras, canciones, entre otras.)	En esta etapa se busca relacionar a los individuos con los nuevos conceptos o conocimientos, esto puede hacerse desde situaciones problemáticas en las que el estudiante se da cuenta que lo que sabe no es suficiente para resolver los cuestionamientos que se le proponen.	que puede partir de discusiones, debates, lluvia de ideas, juegos, entre otros; permitiéndole confrontar su saber con el de sus compañeros En estas actividades se fomentan habilidades superiores del pensamiento como el análisis, la síntesis y la abstracción. Algunas maneras de realizar este trabajo pueden ser los mapas mentales, cuadros sinópticos y otras herramientas metacognitivas que puedan dar cuenta del proceso de aprendizaje de los sujetos involucrados en el proceso.	En este momento el estudiante evidencia la aplicación del nuevo conocimiento y las habilidades desarrolladas en situaciones contextualizadas de la vida diaria. Esto es lo que de cierta manera podría denominarse un trabajo colaborativo por competencias en el que se interpreta la realidad, se usa el nuevo aprendizaje y sobre todo se reconoce su utilidad.
EVALUACIÓN FORMATIVA			
COEVALUACIÓN		AUTOEVALUACIÓN	
<p>Para la coevaluación el estudiante líder debe responder algunos de los siguientes ítems para evaluar a cada uno de los miembros de su grupo de trabajo.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Participó activamente en el desarrollo del trabajo colaborativo • Solicitó de manera respetuosa ayuda cuando tuvo dificultades • Realizó aportes a la construcción de conocimientos • Realizó la consulta de los contenidos por cuenta propia • Brindó ayuda a sus compañeros cuando estos le requirieron • Participó responsable y activamente en la construcción de su propio aprendizaje y el desarrollo de la actividad propuesta en la guía • Aceptó de manera respetuosa la crítica de sus compañeros cuando no cumplió con sus responsabilidades o tuvo dificultades para comprender el contenido 		<p>Para la autoevaluación cada miembro exceptuando al líder, debe responder los siguientes ítems:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Escuché y valoré el trabajo de mi compañero • Participé activamente en el trabajo colaborativo • Pedí respetuosamente ayuda para comprender el contenido cuando fue requerido • Aporté ideas, fuentes de consulta u otros materiales de apoyo • Ayudé a mis compañeros cuando les fue difícil comprender la temática abordada • Participé responsablemente en la construcción de mi propio aprendizaje • Tuve un trato amable y respetuoso con mis compañeros durante las reuniones de trabajo • Participé activamente en el desarrollo de la actividad propuesta en la guía didáctica • Acepté de manera responsable y respetuosa la crítica de mis compañeros cuando no cumplí con mis responsabilidades y me fue difícil la comprensión del tema. • ¿Cómo puedo mejorar para futuros encuentros de trabajo con mis compañeros? 	

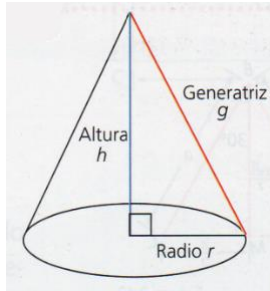
Actividad N°2

Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

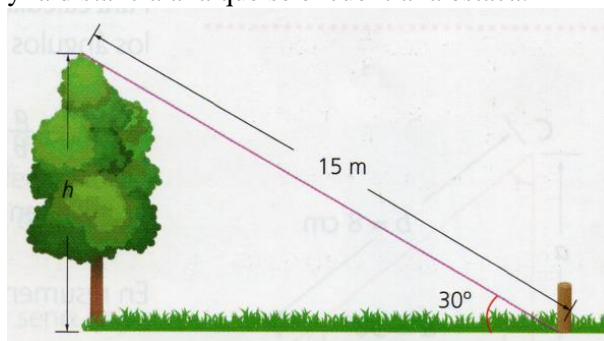
1. Clasifica cada uno de los siguientes triángulos. Halla la medida del ángulo que falta en cada uno y determina la hipotenusa en el triángulo rectángulo.



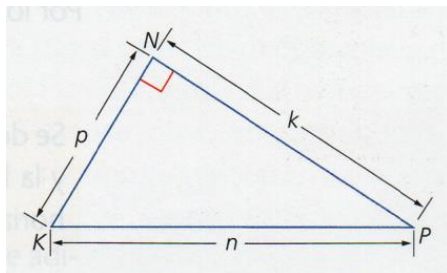
2. Las bases de un trapecio isósceles miden 10 cm y 5 cm, respectivamente. El ángulo que forma la base mayor con cada uno de los lados no paralelos es de 35° .
Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio.
3. Un cono mide 3 cm de radio y 7 cm de altura como se ilustra en la siguiente figura.



- a. Halla la medida de la generatriz
 - b. Encuentra el área del cono
 - c. Expresa las razones trigonométricas seno y coseno entre los elementos del cono, tomando como ángulo α aquel formado por el radio y la generatriz
4. Halla la altura del árbol y la distancia a la que se encuentra la estaca.



5. Un profesor pidió a sus estudiantes resolver el triángulo rectángulo KNP que aparece en la siguiente figura.



Estos fueron algunos de los datos encontrados por tres estudiantes:

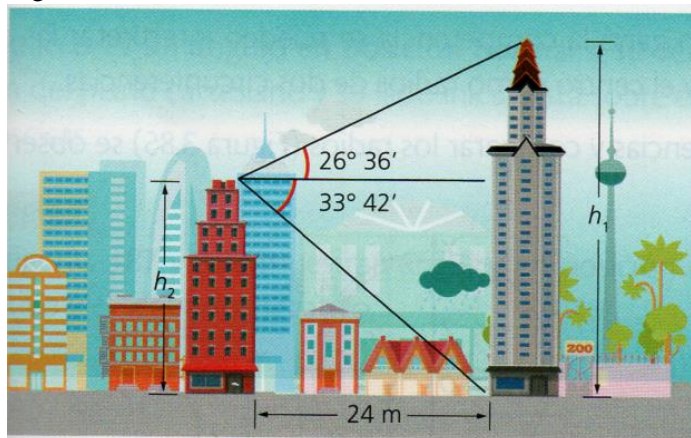
$m\angle P=25^\circ$; $m\angle K=85$, $k=4$ cm y $n=4,4$ cm

$m\angle P=25^\circ$; $m\angle K=65$, $k=4$ cm y $n=3,4$ cm

$m\angle P=25^\circ$; $m\angle K=65$, $k=4$ cm y $n=4,4$ cm

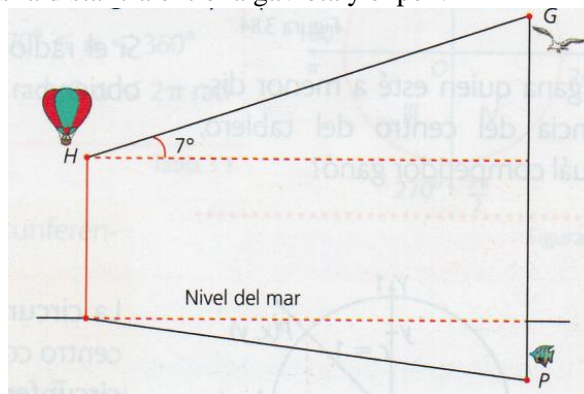
¿Cuáles de las respuestas anteriores no pueden ser correctas? Justifica tu respuesta

6. Observa la siguiente figura



¿Cuál es la altura de cada edificio?

7. Desde un globo H, ubicado a 42 m sobre el nivel del mar, se observa una gaviota G, que está a 20 m del globo, con un ángulo de elevación de 7° . En la línea vertical de la gaviota hay un pez P a 8 m bajo el nivel del mar. ¿Cuál es la distancia entre la gaviota y el pez?

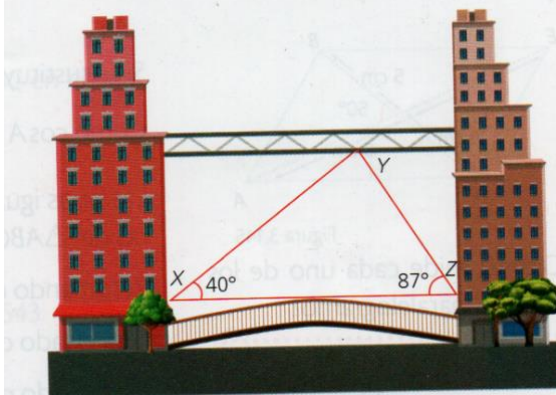


8. Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α , según la condición dada.

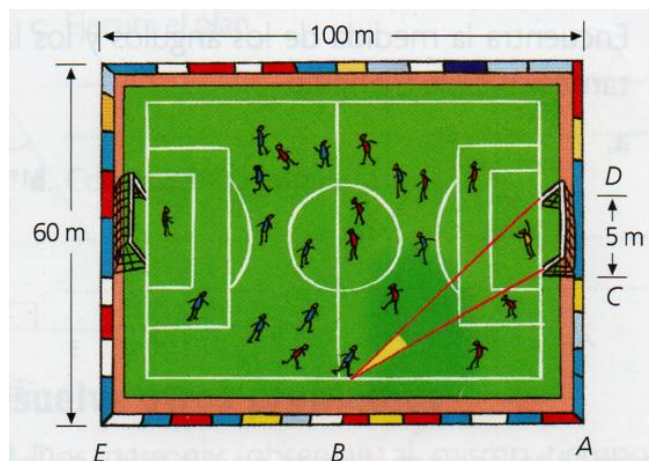
a. α en un ángulo del primer cuadrante y $\cos \alpha = 2/3$

- b. α pertenece al segundo cuadrante y $\text{sen } \alpha = 0,25$
 c. $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ y $\tan \alpha = \sqrt{2}$
 d. $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ y $\sec \alpha = \sqrt{2}$

9. Determina la longitud del puente de la siguiente figura, si la distancia del punto X al Y es de 95 m.



10. Calcula el ángulo de tiro del jugador que está situado en el punto B del campo de la figura a continuación.



Guía didáctica N°3

ÁREA Y/O ASIGNATURA		GRADO	PERIODO	TIEMPO
MATEMÁTICAS		10	4	10 horas de clase
ESTÁNDARES O PROCESOS DE APRENDIZAJE				
<p>Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.</p> <p>Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.</p> <p>Resuelvo problemas en los que se usan las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.</p>				
COMPONENTE(S)			COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	
Geométrico métrico			Interpretación y representación Formulación y ejecución Argumentación	
DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE				
N°	ENUNCIADO		EVIDENCIAS	
5	Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones.		<p>Localiza objetos geométricos en el plano cartesiano.</p> <p>Identifica las propiedades de lugares geométricos a través de su representación en un sistema de referencia.</p> <p>Utiliza las expresiones simbólicas de las cónicas y propone los rangos de variación para obtener una gráfica requerida.</p> <p>Representa lugares geométricos en el plano cartesiano, a partir de su expresión algebraica.</p>	
CONTENIDOS				
TEMA	SUBTEMA		OBJETIVO DE LAS CLASES	MATERIAL DIDÁCTICO
Cónicas	• Secciones cónicas		Localizar objetos geométricos en el plano cartesiano.	Regla, escuadra, transportador, compás, calculadora científica
	• Circunferencia		Identificar las propiedades de lugares geométricos a través de su representación en un sistema de referencia	
	• Parábola		Utilizar las expresiones simbólicas de las cónicas y propone los rangos de variación para obtener una gráfica requerida.	
	• Elipse		Representar lugares geométricos en el plano cartesiano, a partir de su expresión algebraica.	
• Hipérbola				
ACCIONES METODOLÓGICAS EN EL AULA				
EXPLORACIÓN	ESTRUCTURACIÓN	PRÁCTICA	TRANSFERENCIA	
Reconocimiento de saberes previos frente al componente (temáticas), competencias (Habilidades y destrezas) y propósito de aprendizaje. Este momento puede desarrollarse desde diversas estrategias metodológicas y a través de distintos estímulos que abordan la realidad del estudiante (lecturas, videos, preguntas problematizadoras, canciones, entre otras.)	<p>Conceptualización y modelación frente al eje temático y objetivo de aprendizaje</p> <p>Ejecución (acciones de aprendizaje según el uso de materiales educativos y el objetivo de aprendizaje)</p> <p>En esta etapa se busca relacionar a los individuos con los nuevos conceptos o conocimientos, esto puede hacerse desde situaciones problemáticas en las que el estudiante se da cuenta que lo que sabe no es suficiente para resolver los</p>	<p>En este momento se inicia con actividades que propicien la relación del estudiante con el nuevo conocimiento.</p> <p>Es importante generar en el estudiante un desequilibrio cognitivo que puede partir de discusiones, debates, lluvia de ideas, juegos, entre otros; permitiéndole confrontar su saber con el de sus compañeros</p> <p>En estas actividades se fomentan habilidades superiores del pensamiento como el</p>	<p>Conceptualización y modelación frente al eje temático y objetivo de aprendizaje</p> <p>Ejecución (acciones de aprendizaje según el uso de materiales educativos y el objetivo de aprendizaje)</p> <p>En este momento el estudiante evidencia la aplicación del nuevo conocimiento y las habilidades desarrolladas en situaciones contextualizadas de la vida diaria. Esto es lo que de cierta manera podría denominarse un trabajo colaborativo por competencias en el que se interpreta la realidad, se usa el nuevo aprendizaje y sobre todo se reconoce su utilidad.</p>	

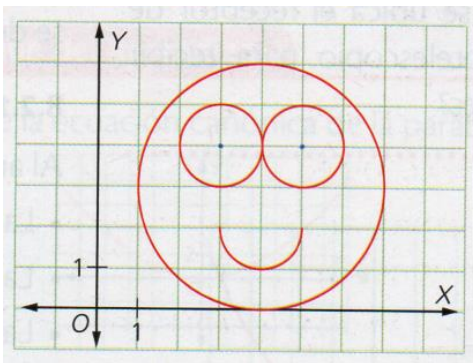
	cuestionamientos que se le proponen.	análisis, la síntesis y la abstracción. Algunas maneras de realizar este trabajo pueden ser los mapas mentales, cuadros sinópticos y otras herramientas metacognitivas que puedan dar cuenta del proceso de aprendizaje de los sujetos involucrados en el proceso.	
EVALUACIÓN FORMATIVA			
COEVALUACIÓN		AUTOEVALUACIÓN	
<p>Para la coevaluación el estudiante líder debe responder algunos de los siguientes ítems para evaluar a cada uno de los miembros de su grupo de trabajo.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Participó activamente en el desarrollo del trabajo colaborativo • Solicitó de manera respetuosa ayuda cuando tuvo dificultades • Realizó aportes a la construcción de conocimientos • Realizó la consulta de los contenidos por cuenta propia • Brindó ayuda a sus compañeros cuando estos le requirieron • Participó responsable y activamente en la construcción de su propio aprendizaje y el desarrollo de la actividad propuesta en la guía • Aceptó de manera respetuosa la crítica de sus compañeros cuando no cumplió con sus responsabilidades o tuvo dificultades para comprender el contenido 		<p>Para la autoevaluación cada miembro exceptuando al líder, debe responder los siguientes ítems:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Escuché y valoré el trabajo de mi compañero • Participé activamente en el trabajo colaborativo • Pedí respetuosamente ayuda para comprender el contenido cuando fue requerido • Aporté ideas, fuentes de consulta u otros materiales de apoyo • Ayudé a mis compañeros cuando les fue difícil comprender la temática abordada • Participé responsablemente en la construcción de mi propio aprendizaje • Tuve un trato amable y respetuoso con mis compañeros durante las reuniones de trabajo • Participé activamente en el desarrollo de la actividad propuesta en la guía didáctica • Acepté de manera responsable y respetuosa la crítica de mis compañeros cuando no cumplí con mis responsabilidades y me fue difícil la comprensión del tema. • ¿Cómo puedo mejorar para futuros encuentros de trabajo con mis compañeros? 	

Actividad N°3

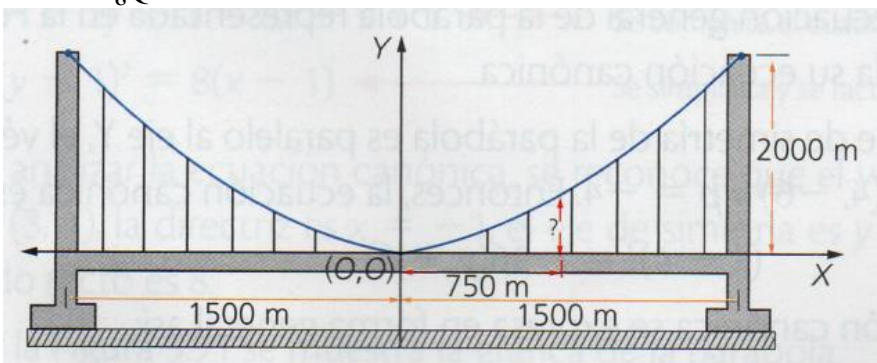
Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

- Usa el discriminante para determinar si la ecuación dada corresponde a circunferencia, una parábola, una elipse o a una hipérbola.
 - $x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$
 - $153x^2 + 192xy + 97y^2 = 225$
 - $9x^2 - 24xy - 16y^2 = 100x - 100y - 100$
 - $25x^2 - 120xy = -144y^2 + 156x + 65y$
 - $53x^2 + 72xy + 73y^2 - 40x + 30y = 7$
- Escribe la ecuación canónica de cada circunferencia según las condiciones dadas.
 - Es tangente a ambos ejes y tiene como centro la coordenada (-3,3)
 - Los extremos de uno de sus diámetros tienen las coordenadas (0,4) y (10,4)
 - Se obtiene al trasladar 6 unidades hacia abajo y 3 unidades a la derecha la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 = 7$

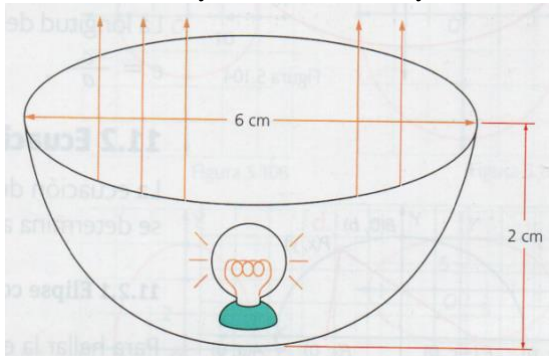
3. Determina las ecuaciones (general y canónica) de cada circunferencia que compone el emoticón de la figura a continuación.



4. Un puente colgante tiene un diseño parabólico, tal como se ilustra a continuación. La altura de las dos columnas que sostienen el cable es de 2 000 m cada una. Las dos columnas están separadas por una distancia de 3 000 m. ¿Qué altura tiene el cable a los 750 m de su vértice?

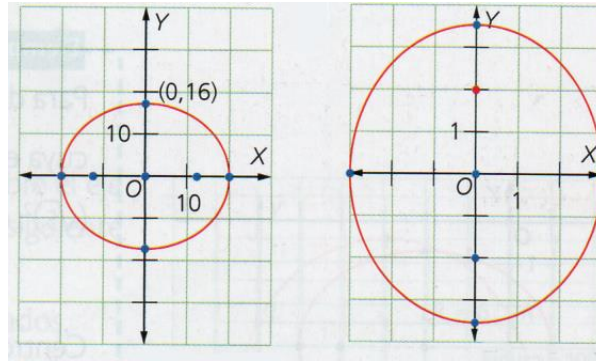


5. Una farola parabólica mide 6 cm de ancho y 2 cm de alto, tal y como lo muestra la figura

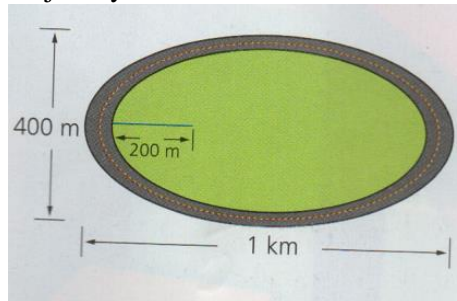


¿A qué distancia se debe colocar el filamento del bombillo?

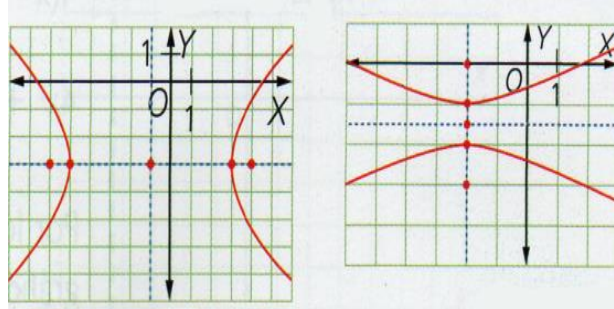
6. Determina la ecuación canónica y general de cada elipse.



7. Un óvalo de carreras tiene forma de elipse con 1 km de largo y 400 m de ancho. ¿Cuál es el ancho de la pista a 200 m del extremo del eje mayor?



8. Determina la ecuación canónica y general de cada hipérbola a partir de su gráfica.



Guía didáctica N°4

ÁREA Y/O ASIGNATURA		GRADO	PERIODO	TIEMPO
MATEMÁTICAS		10	4	6 horas de clase
ESTÁNDARES O PROCESOS DE APRENDIZAJE				
Interpreto y comparo resultados de estudios con información estadística provenientes de medios de comunicación.				
Justifico o refuto inferencias basadas en razonamientos estadísticos a partir de resultados de estudios publicados en los medios o diseñados en el ámbito escolar.				
Interpreto nociones básicas relacionadas con el manejo de información como población, muestra, variable aleatoria, distribución de frecuencias, parámetros y estadígrafos).				
COMPONENTE(S)			COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	
Componente aleatorio			Interpretación y representación Formulación y ejecución Argumentación	
DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE				
N°	ENUNCIADO	EVIDENCIAS		
8	Selecciona muestras aleatorias en poblaciones grandes para inferir el comportamiento de las variables en estudio. Interpreta, valora y analiza críticamente los resultados y las inferencias presentadas en estudios estadísticos.	<p>Define la población de la cual va a extraer las muestras.</p> <p>Define el tamaño y el método de selección de la muestra.</p> <p>Construye gráficas para representar las distribuciones de los datos muestrales y encuentra los estadígrafos adecuados. Usa software cuando sea posible.</p> <p>Hace inferencias sobre los parámetros basadas en los estadígrafos calculados.</p> <p>Hace análisis críticos de las conclusiones de los estudios presentados en medios de comunicación o en artículos científicos.</p>		
CONTENIDOS		OBJETIVO DE LAS CLASES	MATERIAL DIDÁCTICO	
TEMA	SUBTEMA	<p>Construir gráficas para representar las distribuciones de los datos muestrales y encuentra los estadígrafos adecuados. Usa software cuando sea posible.</p> <p>Hacer inferencias sobre los parámetros basadas en los estadígrafos calculados.</p> <p>Hacer análisis críticos de las conclusiones de los estudios presentados en medios de comunicación o en artículos científicos.</p>	Regla, escuadra, transportador, compás, calculadora científica, colores, marcadores	
Lectura, análisis e interpretación de tablas y gráficas estadísticas	<ul style="list-style-type: none"> • Variables cualitativas y cuantitativas • Distribución de frecuencias 			
ACCIONES METODOLÓGICAS EN EL AULA				
EXPLORACIÓN	ESTRUCTURACIÓN	PRÁCTICA	TRANSFERENCIA	
Reconocimiento de saberes previos frente al componente (temáticas), competencias (Habilidades y destrezas) y propósito de aprendizaje. Este momento puede desarrollarse desde diversas estrategias metodológicas y a través de distintos estímulos que abordan la realidad del estudiante (lecturas, videos, preguntas problematizadoras, canciones, entre otras.)	<p>Conceptualización y modelación frente al eje temático y objetivo de aprendizaje</p> <p>Ejecución (acciones de aprendizaje según el uso de materiales educativos y el objetivo de aprendizaje)</p> <p>En esta etapa se busca relacionar a los individuos con los nuevos conceptos o conocimientos, esto puede hacerse desde situaciones problemáticas en las que el estudiante se da cuenta que lo que sabe no es suficiente para resolver los cuestionamientos que se le proponen.</p>	<p>En este momento se inicia con actividades que propicien la relación del estudiante con el nuevo conocimiento.</p> <p>Es importante generar en el estudiante un desequilibrio cognitivo que puede partir de discusiones, debates, lluvia de ideas, juegos, entre otros; permitiéndole confrontar su saber con el de sus compañeros</p> <p>En estas actividades se fomentan habilidades superiores del pensamiento como el análisis, la síntesis y la abstracción.</p>	<p>Conceptualización y modelación frente al eje temático y objetivo de aprendizaje</p> <p>Ejecución (acciones de aprendizaje según el uso de materiales educativos y el objetivo de aprendizaje)</p> <p>En este momento el estudiante evidencia la aplicación del nuevo conocimiento y las habilidades desarrolladas en situaciones contextualizadas de la vida diaria.</p> <p>Esto es lo que de cierta manera podría denominarse un trabajo colaborativo por competencias en el que se interpreta la realidad, se usa el nuevo aprendizaje y sobre todo se reconoce su utilidad.</p>	

		Algunas maneras de realizar este trabajo pueden ser los mapas mentales, cuadros sinópticos y otras herramientas metacognitivas que puedan dar cuenta del proceso de aprendizaje de los sujetos involucrados en el proceso.	
EVALUACIÓN FORMATIVA			
COEVALUACIÓN		AUTOEVALUACIÓN	
<p>Para la coevaluación el estudiante líder debe responder algunos de los siguientes ítems para evaluar a cada uno de los miembros de su grupo de trabajo.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Participó activamente en el desarrollo del trabajo colaborativo • Solicitó de manera respetuosa ayuda cuando tuvo dificultades • Realizó aportes a la construcción de conocimientos • Realizó la consulta de los contenidos por cuenta propia • Brindó ayuda a sus compañeros cuando estos le requirieron • Participó responsable y activamente en la construcción de su propio aprendizaje y el desarrollo de la actividad propuesta en la guía • Aceptó de manera respetuosa la crítica de sus compañeros cuando no cumplió con sus responsabilidades o tuvo dificultades para comprender el contenido 		<p>Para la autoevaluación cada miembro exceptuando al líder, debe responder los siguientes ítems:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Escuché y valoré el trabajo de mi compañero • Participé activamente en el trabajo colaborativo • Pedí respetuosamente ayuda para comprender el contenido cuando fue requerido • Aporté ideas, fuentes de consulta u otros materiales de apoyo • Ayudé a mis compañeros cuando les fue difícil comprender la temática abordada • Participé responsablemente en la construcción de mi propio aprendizaje • Tuve un trato amable y respetuoso con mis compañeros durante las reuniones de trabajo • Participé activamente en el desarrollo de la actividad propuesta en la guía didáctica • Acepté de manera responsable y respetuosa la crítica de mis compañeros cuando no cumplí con mis responsabilidades y me fue difícil la comprensión del tema. • ¿Cómo puedo mejorar para futuros encuentros de trabajo con mis compañeros? 	

Actividad N°4

Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

1. Lee la situación planteada a continuación y resuélvela. En la tabla que se muestra a continuación se registró la preferencia de un grupo de estudiantes por ciertas profesiones

Profesiones preferidas	Número de estudiantes
Administración	5.265
Educación y pedagogía	238
Comunicación	4.804
Ciencias políticas	299

- a. Construye una distribución de frecuencias absolutas y relativas
 - b. Dibuja la gráfica de barras y el diagrama circular correspondiente. Da tres conclusiones importantes a partir de lo observado en las gráficas.
2. Se preguntó a 500 personas por el número de veces que van al cine durante un mes y se registraron los datos como sigue

Número de veces que van al cine	Frecuencias
0	93

1	181
2	117
3	56
4	43
5	10

- a. Elabora un diagrama de frecuencias absolutas, la gráfica de barras y el diagrama de sectores
 - b. Escribe tres conclusiones significativas de los resultados
3. Se preguntó a 44 estudiantes por el tiempo, medido en minutos, que tardan en llegar a su sitio de estudio.

Las respuestas obtenidas fueron.

15 20 17 24 45 40 35 39 46 44 50
 47 42 40 38 30 35 45 35 37 47 48
 50 55 38 37 40 43 40 39 45 48 50
 35 20 57 55 56 47 43 37 34 50 60

- a. Elabora la distribución de frecuencias absolutas, relativas y acumuladas para esta variable
- b. Elabora el histograma de frecuencias porcentuales
- c. Realiza el histograma de frecuencias acumuladas
- d. Escribe cinco conclusiones relacionadas con el tiempo que tarda el grupo de estudiantes en llegar a su sitio de estudio.

Guía didáctica N°5

ÁREA Y/O ASIGNATURA		GRADO	PERIODO	TIEMPO
MATEMÁTICAS		10	4	4 horas de clase
ESTÁNDARES O PROCESOS DE APRENDIZAJE				
Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad).				
COMPONENTE(S)			COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	
Componente aleatorio			Interpretación y representación Formulación y ejecución Argumentación	
DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE				
Nº	ENUNCIADO	EVIDENCIAS		
9	Comprende y explica el carácter relativo de las medidas de tendencias central y de dispersión, junto con algunas de sus propiedades, y la necesidad de complementar una medida con otra para obtener mejores lecturas de los datos.	<p>Encuentra las medidas de tendencia central y de dispersión, usando, cuando sea posible, herramientas tecnológicas.</p> <p>Interpreta y compara lo que representan cada una de las medidas de tendencia central en un conjunto de datos.</p> <p>Interpreta y compara lo que representan cada una de las medidas de dispersión en un conjunto de datos.</p> <p>Usa algunas de las propiedades de las medidas de tendencia central y de dispersión para caracterizar un conjunto de datos.</p> <p>Formula conclusiones sobre la distribución de un conjunto de datos, empleando más de una medida.</p>		
CONTENIDOS		OBJETIVO DE LAS CLASES	MATERIAL DIDÁCTICO	
TEMA	SUBTEMA			
Medidas de tendencia central, de dispersión y de posición		Encuentra las medidas de tendencia central, de dispersión y de posición.	Regla, calculadora científica.	
	• Medidas de tendencia central	Interpreta y compara lo que representan cada una de las medidas de tendencia central en un conjunto de datos		
	• Medidas de dispersión	Interpreta y compara lo que representan cada una de las medidas de dispersión en un conjunto de datos		
	• Medidas de posición	Interpreta y compara lo que representan cada una de las medidas de posición en un conjunto de datos		
	• Análisis de información y toma de decisiones	Formula conclusiones sobre la distribución de un conjunto de datos, empleando más de una medida.		
ACCIONES METODOLÓGICAS EN EL AULA				
EXPLORACIÓN	ESTRUCTURACIÓN	PRÁCTICA	TRANSFERENCIA	
Reconocimiento de saberes previos frente al componente (temáticas), competencias (Habilidades y destrezas) y propósito de aprendizaje. Este momento puede desarrollarse desde diversas estrategias metodológicas y a través de distintos estímulos que abordan la realidad del estudiante (lecturas, videos, preguntas problematizadoras, canciones, entre otras.)	<p>Conceptualización y modelación frente al eje temático y objetivo de aprendizaje</p> <p>Ejecución (acciones de aprendizaje según el uso de materiales educativos y el objetivo de aprendizaje)</p> <p>En esta etapa se busca relacionar a los individuos con los nuevos conceptos o conocimientos, esto puede hacerse desde situaciones problemáticas en las que el estudiante se da cuenta que lo que sabe no es suficiente para resolver los</p>	<p>En este momento se inicia con actividades que propicien la relación del estudiante con el nuevo conocimiento.</p> <p>Es importante generar en el estudiante un desequilibrio cognitivo que puede partir de discusiones, debates, lluvia de ideas, juegos, entre otros; permitiéndole confrontar su saber con el de sus compañeros</p> <p>En estas actividades se fomentan habilidades superiores del pensamiento como el</p>	<p>Conceptualización y modelación frente al eje temático y objetivo de aprendizaje</p> <p>Ejecución (acciones de aprendizaje según el uso de materiales educativos y el objetivo de aprendizaje)</p> <p>En este momento el estudiante evidencia la aplicación del nuevo conocimiento y las habilidades desarrolladas en situaciones contextualizadas de la vida diaria.</p> <p>Esto es lo que de cierta manera podría denominarse un trabajo colaborativo por competencias en el que se interpreta la</p>	

	cuestionamientos que se le proponen.	análisis, la síntesis y la abstracción. Algunas maneras de realizar este trabajo pueden ser los mapas mentales, cuadros sinópticos y otras herramientas metacognitivas que puedan dar cuenta del proceso de aprendizaje de los sujetos involucrados en el proceso.	realidad, se usa el nuevo aprendizaje y sobre todo se reconoce su utilidad.
EVALUACIÓN FORMATIVA			
COEVALUACIÓN		AUTOEVALUACIÓN	
<p>Para la coevaluación el estudiante líder debe responder algunos de los siguientes ítems para evaluar a cada uno de los miembros de su grupo de trabajo.</p> <ul style="list-style-type: none"> Participó activamente en el desarrollo del trabajo colaborativo Solicitó de manera respetuosa ayuda cuando tuvo dificultades Realizó aportes a la construcción de conocimientos Realizó la consulta de los contenidos por cuenta propia Brindó ayuda a sus compañeros cuando estos le requirieron Participó responsable y activamente en la construcción de su propio aprendizaje y el desarrollo de la actividad propuesta en la guía Aceptó de manera respetuosa la crítica de sus compañeros cuando no cumplió con sus responsabilidades o tuvo dificultades para comprender el contenido 		<p>Para la autoevaluación cada miembro exceptuando al líder, debe responder los siguientes ítems:</p> <ul style="list-style-type: none"> Escuché y valoré el trabajo de mi compañero Participé activamente en el trabajo colaborativo Pedí respetuosamente ayuda para comprender el contenido cuando fue requerido Aporté ideas, fuentes de consulta u otros materiales de apoyo Ayudé a mis compañeros cuando les fue difícil comprender la temática abordada Participé responsablemente en la construcción de mi propio aprendizaje Tuve un trato amable y respetuoso con mis compañeros durante las reuniones de trabajo Participé activamente en el desarrollo de la actividad propuesta en la guía didáctica Acepté de manera responsable y respetuosa la crítica de mis compañeros cuando no cumplí con mis responsabilidades y me fue difícil la comprensión del tema. ¿Cómo puedo mejorar para futuros encuentros de trabajo con mis compañeros? 	

Actividad N°5

Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

1. La siguiente tabla resume la información de la edad a la que un grupo de mujeres tuvo su primer hijo

Intervalo	Frecuencias
[15,20)	17
[20,25)	13
[25,30)	21
[30,35)	29
[35,40)	41

Hala las medidas de tendencia central y escribe la interpretación de cada una.

2. Las sumas de los puntos obtenidos al lanzar 20 veces dos dados son:

9 3 6 4 5 8 5 6 4 11
7 8 7 8 5 7 2 9 7 10

- a. Calcula la media, la mediana y la moda
 - b. Calcula la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación
 - c. Interpreta los resultados de cada medida de dispersión
3. Los siguientes valores son los rendimientos por hectárea de café en grano (en toneladas) en 8 fincas de diferentes regiones del país:

1 2 3 4 5 11 11 30

- a. Calcula el rango
 - b. Calcula las medidas de tendencia central
 - c. Calcula las medidas de dispersión
 - d. Calcula el primer y tercer cuartil
 - e. Halla los deciles 3 y 7
 - f. Halla los percentiles 10 y 90
4. En la tabla a continuación se registran los datos que recogió un pediatra sobre la edad que tenían 50 niños cuando caminaron por primera vez

9	10	11	12	13	14	15	1	4	9
16	11	8	1	1	8	11	9	10	6
1	7	8	9	15	15	13	5	12	10
9	8	9	11	1	1	13	6	10	6
1	7	9	8	9	8	6	7	1	12

- a. Elabora una tabla de distribución de frecuencias
 - b. Halla las medidas de tendencia central e interpreta sus valores
 - c. Halla Q_1 , D_8 , D_9 , P_{40} , P_{50} y P_{80} e interpreta los resultados de cada uno
5. Roberto vive en Cali con su esposa y sus hijos de tres y cinco años. La empresa donde labora lo piensa reubicar en México por dos años, pero no le puede brindar apoyo para que se instale allí con su familia. A Roberto le preocupa alejarse por tanto tiempo de su familia, pero también perder su empleo en el que ya lleva 5 años.
- ¿qué decisión debería tomar Roberto? ¿qué implicaciones le acarrearían tomar esta decisión?

Guía didáctica N° 6

ÁREA Y/O ASIGNATURA		GRADO	PERIODO	TIEMPO
MATEMÁTICAS		10	4	6 horas de clase
ESTÁNDARES O PROCESOS DE APRENDIZAJE				
<p>Interpreto conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos.</p> <p>Resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con reemplazo).</p> <p>Propongo inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas</p>				
COMPONENTE(S)			COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	
Componente aleatorio			Interpretación y representación Formulación y ejecución Argumentación	
DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE				
N°	ENUNCIADO	EVIDENCIAS		
10	Propone y realiza experimentos aleatorios en contextos de las ciencias naturales o sociales y predice la ocurrencia de eventos, en casos para los cuales el espacio muestral es indeterminado.	<p>Plantea o identifica una pregunta cuya solución requiera de la realización de un experimento aleatorio.</p> <p>Identifica la población y las variables en estudio.</p> <p>Encuentra muestras aleatorias para hacer predicciones sobre el comportamiento de las variables en estudio</p> <p>Usa la probabilidad frecuencial para interpretar la posibilidad de ocurrencia de un evento dado.</p> <p>Infiere o valida la probabilidad de ocurrencia del evento en estudio.</p>		
CONTENIDOS		OBJETIVO DE LAS CLASES	MATERIAL DIDÁCTICO	
TEMA	SUBTEMA			
Probabilidad	<ul style="list-style-type: none"> • Probabilidad básica • Principios aditivos y multiplicativo • Probabilidad de la unión de sucesos • Probabilidad condicionada e independencia de sucesos 	<p>Encontrar muestras aleatorias para hacer predicciones sobre el comportamiento de las variables en estudio</p> <p>Usar la probabilidad frecuencial para interpretar la posibilidad de ocurrencia de un evento dado.</p> <p>Inferir o validar la probabilidad de ocurrencia del evento en estudio.</p>	Calculadora científica	
ACCIONES METODOLÓGICAS EN EL AULA				
EXPLORACIÓN	ESTRUCTURACIÓN	PRÁCTICA	TRANSFERENCIA	
Reconocimiento de saberes previos frente al componente (temáticas), competencias (Habilidades y destrezas) y propósito de aprendizaje. Este momento puede desarrollarse desde diversas estrategias metodológicas y a través de distintos estímulos que abordan la realidad del estudiante (lecturas, videos, preguntas problematizadoras, canciones, entre otras.)	Conceptualización y modelación frente al eje temático y objetivo de aprendizaje Ejecución (acciones de aprendizaje según el uso de materiales educativos y el objetivo de aprendizaje) En esta etapa se busca relacionar a los individuos con los nuevos conceptos o conocimientos, esto puede hacerse desde situaciones problemáticas en las que el estudiante se da cuenta que lo que sabe no es suficiente	En este momento se inicia con actividades que propicien la relación del estudiante con el nuevo conocimiento. Es importante generar en el estudiante un desequilibrio cognitivo que puede partir de discusiones, debates, lluvia de ideas, juegos, entre otros; permitiéndole confrontar su saber con el de sus compañeros En estas actividades se fomentan habilidades	Conceptualización y modelación frente al eje temático y objetivo de aprendizaje Ejecución (acciones de aprendizaje según el uso de materiales educativos y el objetivo de aprendizaje) En este momento el estudiante evidencia la aplicación del nuevo conocimiento y las habilidades desarrolladas en situaciones contextualizadas de la vida diaria. Esto es lo que de cierta manera podría denominarse un trabajo colaborativo por competencias en el que se interpreta la realidad, se	

	para resolver los cuestionamientos que se le proponen.	superiores del pensamiento como el análisis, la síntesis y la abstracción. Algunas maneras de realizar este trabajo pueden ser los mapas mentales, cuadros sinópticos y otras herramientas metacognitivas que puedan dar cuenta del proceso de aprendizaje de los sujetos involucrados en el proceso.	usa el nuevo aprendizaje y sobre todo se reconoce su utilidad.
EVALUACIÓN FORMATIVA			
COEVALUACIÓN		AUTOEVALUACIÓN	
<p>Para la coevaluación el estudiante líder debe responder algunos de los siguientes ítems para evaluar a cada uno de los miembros de su grupo de trabajo.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Participó activamente en el desarrollo del trabajo colaborativo • Solicitó de manera respetuosa ayuda cuando tuvo dificultades • Realizó aportes a la construcción de conocimientos • Realizó la consulta de los contenidos por cuenta propia • Brindó ayuda a sus compañeros cuando estos le requirieron • Participó responsable y activamente en la construcción de su propio aprendizaje y el desarrollo de la actividad propuesta en la guía • Aceptó de manera respetuosa la crítica de sus compañeros cuando no cumplió con sus responsabilidades o tuvo dificultades para comprender el contenido 		<p>Para la autoevaluación cada miembro exceptuando al líder, debe responder los siguientes ítems:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Escuché y valoré el trabajo de mi compañero • Participé activamente en el trabajo colaborativo • Pedí respetuosamente ayuda para comprender el contenido cuando fue requerido • Aporté ideas, fuentes de consulta u otros materiales de apoyo • Ayudé a mis compañeros cuando les fue difícil comprender la temática abordada • Participé responsablemente en la construcción de mi propio aprendizaje • Tuve un trato amable y respetuoso con mis compañeros durante las reuniones de trabajo • Participé activamente en el desarrollo de la actividad propuesta en la guía didáctica • Acepté de manera responsable y respetuosa la crítica de mis compañeros cuando no cumplí con mis responsabilidades y me fue difícil la comprensión del tema. • ¿Cómo puedo mejorar para futuros encuentros de trabajo con mis compañeros? 	

Actividad N°6

Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

1. Sean A, B y C tres sucesos de un experimento aleatorio, tales que:

$$P(A) = 0,3 \quad P(B) = 0,5 \quad P(C) = 0,7$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,4 \quad P(A \cup C) = 0,6 \quad P(B \cap C) = 0,3$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0,1$$

Halla las siguientes probabilidades

- $P(\bar{A})$
- $P(A \cup B)$
- $P(B \cup C)$
- $P(A \cap C)$
- $P(A \cup B \cup C)$
- $P(\bar{A} \cap \bar{C})$
- $P(\bar{A} \cup \bar{B})$
- $P(\bar{B} \cap C)$
- $P(A - B)$

j. $P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C})$

2. De los 600 estudiantes de un colegio, 240 tienen los ojos claros, 325 tienen cabello oscuro y 110 tienen cabello rubio con los ojos oscuros. Se escoge un estudiante al azar. Halla la probabilidad de que:
- Tenga cabello rubio
 - Tenga ojos oscuros
 - Tenga cabello oscuro y tenga ojos claros

3. En una bolsa hay 5 canicas azules y 5 rojas. Completa los enunciados
La probabilidad de sacar una canica azul es ____ de ____.

Pero después de sacar una canica azul las probabilidades cambian.

Así que, en la próxima extracción, si se saca una canica roja, la probabilidad de extraer una azul es ____ de ____, pero, si se saca una azul, entonces la probabilidad de obtener nuevamente una azul es ____ de ____.

4. Un estudiante va a la biblioteca. La probabilidad de que seleccione una obra de ficción es 0,40, que elija una obra de no ficción es 0,30 y que opte por una ficción o de no ficción es 0,20. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccione una obra de ficción, una de no ficción o ambas?
5. Andrés desea ir a Cartagena o a Capurganá en las próximas vacaciones de fin de año. Para ir a Cartagena tiene tres medios de transporte hasta Medellín y dos para ir de Medellín a Cartagena, y para ir a Capurganá desde Medellín tiene cuatro diferentes medios de transporte.
- ¿Cuántas maneras diferentes tiene Andrés para ir a Cartagena o a Capurganá?
 - ¿Cuántas maneras diferentes, tiene Andrés para ir a Cartagena o a Capurganá en viaje redondo, ¿si no regresa por el mismo medio de transporte por el que inició el viaje?

Anexo G. Sesiones de profundización de líderes

En este anexo se muestra sesiones de profundización de contenidos que se realizaron con los estudiantes líderes, en horarios extracurriculares. Estas sesiones se realizaron dos veces por semana y antes del desarrollo de cada una de las guías didácticas propuestas.



Anexo H. Sometimiento del grupo experimental al tratamiento

En esta sección se ilustran momentos durante el desarrollo del experimento, donde los estudiantes líderes dan a conocer la temática a sus compañeros y realizan las guías de actividades.





Anexo I. Prueba Postest

Respetable estudiante; el presente cuestionario tiene como finalidad realizar un estudio de investigación en el área de matemáticas en la Universidad de Córdoba de la maestrante Lenis Judith Sierra Llorente. En virtud a lo anterior, se le agradece de forma muy especial su colaboración para responder las preguntas que encontrará a continuación. No está demás enfatizar que los datos o consecuencias en sus actividades escolares, evaluaciones o calificaciones en el curso, no generará ningún gasto, ni recibirá remuneración alguna por su participación, debido a que se utilizarán únicamente como evidencia del trabajo de investigación de la docente.

INSTRUCCIONES

Conteste los siguientes interrogantes con responsabilidad y honestidad de acuerdo con los conocimientos que tenga sobre la temática tratada. Elija la opción que considere correcta y rellene el ovalo en la hoja de respuestas.

1. Felipe juega con dos dados que tienen forma cúbica. Uno de ellos tiene 2 caras rojas, 2 blancas, una azul y otra verde. El otro dado tiene sus caras marcadas con los números 1,2,3,4,5 y 6 respectivamente.

La probabilidad de obtener cara verde y 5 al lanzar los dados es $\frac{1}{36}$

Si Felipe lanzó los dos dados simultáneamente sobre el experimento aleatorio, es correcto afirmar que

 - E. solamente seis de los posibles eventos tienen probabilidades igual a $\frac{1}{18}$.
 - F. la mitad de los posibles eventos tienen probabilidad igual a $\frac{1}{18}$.
 - G. uno de los posibles eventos tiene probabilidad igual a $\frac{1}{72}$.
 - H. todos los posibles eventos tiene probabilidad igual a $\frac{1}{36}$.

2. Una caja contiene nueve balotas marcadas con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Si se selecciona una balota al azar, ¿es correcto afirmar que es más probable que esta balota tenga marcado un número impar?

 - A. Sí, porque sin importar como se marquen las balotas, nueve es impar.
 - B. No, porque cada balota tiene la misma probabilidad de seleccionarse.
 - C. Sí, porque en las balotas hay marcados más números impares que pares.
 - D. No, porque la probabilidad de que el número marcado sea par o impar es la misma.

3. La alcaldía del municipio de Palmira desarrolla una encuesta a 4.000 estudiantes distribuidos en 4 grupos de edades (1.000 estudiantes por cada grupo) donde se pretende indagar acerca de la materia favorita. Los resultados se muestran en la siguiente gráfica.



En la información de la gráfica y comparando las asignaturas de ciencias naturales y matemáticas puede afirmarse que la mayor variación está en el grupo de edad de

- A. 6 a 9 años
- B. 10 a 13 años
- C. 14 a 16 años
- D. 17 a 19 años

4. Se realizó una encuesta a 800 estudiantes del Grupo Educativo Hélder Pardo para saber cómo califican la preparación que reciben. La gráfica muestra los porcentajes de las calificaciones dadas por los estudiantes.



La afirmación verdadera acerca de los resultados de la encuesta es:

- A. menos de 300 estudiantes consideran que la preparación que ofrece el Grupo Educativo es regular.
 - B. más de 120 estudiantes consideran que la preparación que ofrece el Grupo Educativo es excelente
 - C. menos 380 estudiantes están satisfechos con la preparación que ofrece el Grupo Educativo.
 - D. más de 250 estudiantes consideran que la preparación que ofrece el Grupo Educativo es buena.
5. David trabaja en un grupo educativo organizando el material didáctico (Retos al Saber y Cartillas). La gráfica muestra la cantidad de cajas que ha empacado durante algunos días de la semana.

¿Cuál de las siguientes tablas muestra la cantidad de cajas de Retos al Saber que empaco David el martes y el viernes?

Retos al Saber	Martes	Viernes	A.
N° de cajas	40	30	

Retos al Saber	Martes	Viernes	B.
N° de cajas	40	50	

Retos al Saber	Martes	Viernes	C.
N° de cajas	15	30	

Retos al Saber	Martes	Viernes	D.
N° de cajas	15	50	



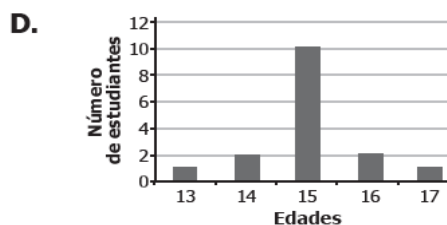
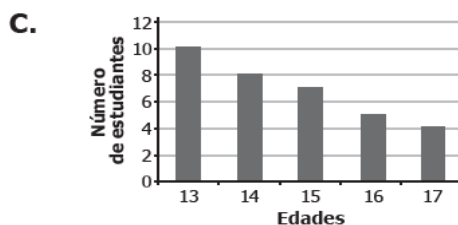
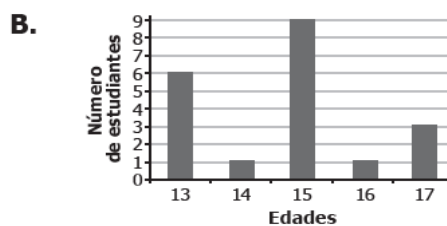
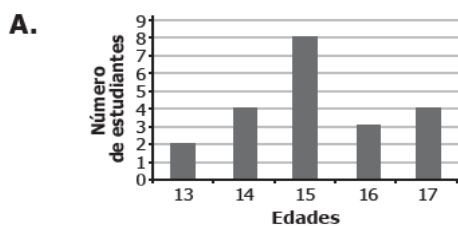
6. En la tabla se relaciona la ubicación y la localidad de las 80.000 personas que asistieron a un concierto de Juanes y Shakira en una ciudad

Ubicación \ Localidad		Ubicación		
		Lateral	oriental	Total
General		15.000	20.000	35.000
Preferencial		8.000	4.000	12.000
VIP		15.000	10.000	25.000
Platino		2.000	6.000	8.000
TOTAL		40.000	40.000	80.000

Con las boletas se realizó un sorteo de un pase para conocer a Juanes y Shakira. Se sabe que el ganador compró boleta en lateral y que la probabilidad de ser seleccionado en la localidad en que estaba es de $1/5$. ¿Cuál era la localidad del asistente que ganó el pase?

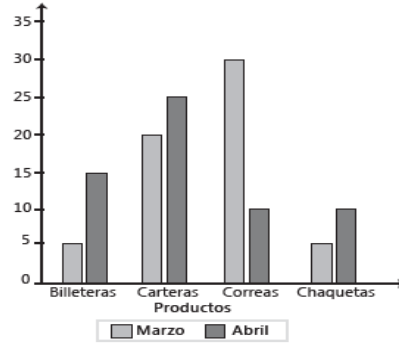
- A. General.
 B. Preferencial.
 C. VIP.
 D. Platino.

7. Al hacer una encuesta en un curso, se determinó que la mayoría de estudiantes tienen 15 años de edad. ¿Cuál de las siguientes gráficas NO puede corresponder a la distribución de los estudiantes de curso?



Responde las preguntas 8, 9 y 10 de acuerdo a la siguiente información

La gráfica muestra la cantidad de productos vendidos en una tienda, en marzo y abril.



8. En el mes de marzo, el número de unidades vendidas de cada producto es un número entre:
- 5 y 10.
 - 15 y 45.
 - 10 y 25.
 - 5 y 30.
9. El producto del cual se vendió en total un mayor número de unidades en los dos meses fue:
- Billeteras.
 - Carteras.
 - Correas.
 - Chaquetas.
10. Teniendo en cuenta que los ingresos que tuvo la tienda por cada tipo de producto equivalen a:
- ingresos por un producto = número de unidades del producto vendidas x precio de la unidad de producto.***
- una persona afirma que en los dos meses la tienda tuvo los mismos ingresos totales.
¿La información de la gráfica es suficiente para determinar la veracidad de la afirmación?
- No, porque los ingresos dependen del precio de cada producto.
 - No, porque los ingresos dependen de la variación de la cantidad de productos vendidos.
 - Sí, porque los ingresos en marzo fueron mayores por la venta de correas.
 - Sí, porque los ingresos fueron iguales en los dos meses, ya que se vendió la misma cantidad de productos.
11. La gráfica contiene la información acerca de la estatura de cinco integrantes del equipo de baloncesto de la selección de un departamento



Se puede deducir que, con respecto a la estatura, hay exactamente

- A. 3 jugadores por encima del promedio.
- B. 1 jugador por debajo del promedio.
- C. 2 jugadores por encima del promedio.
- D. 3 jugadores por debajo del promedio.

12. En la nevera de Juanita hay 20 jugos de los cuales 5 son de manzana y los demás de pera. Si antes de que alguien se tome un jugo al azar, la mamá de Juanita guarda 10 más de cada sabor, la probabilidad de que tome un jugo de manzana, ahora respecto al momento en que había 20 jugos, es

- A. menor, porque la cantidad total de jugos aumenta.
- B. mayor, porque se agrega la misma cantidad de cada sabor.
- C. menor, porque la proporción de jugos de manzana disminuye respecto al total.
- D. mayor, porque la proporción de jugos de manzana aumenta respecto al total.

13. Se realiza una encuesta para averiguar las preferencias en marcas de lápices en una empresa. Los resultados se muestran en la tabla.

Afirmar que la probabilidad de que un hombre prefiera la marca 1 es mayor que la probabilidad de que una mujer prefiera la marca 1 es:

- A. Correcto, porque hay más hombres que prefieren la marca 1 que mujeres que prefieren la marca 1.
- B. Correcto, porque las probabilidades de estos eventos son 0,26 y 0,21, respectivamente.
- C. Incorrecto, porque el número de hombres que prefieren la marca 1 es diferente del número de mujeres.
- D. Incorrecto, porque las probabilidades de estos eventos son 0,4 y 0,6, respectivamente.

	Hombres	Mujeres	Total
Marca 1	260	210	470
Marca 2	190	60	250
Marca 3	200	80	280
Total	650	350	1.000

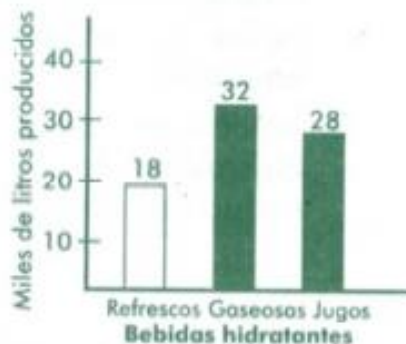
14. El profesor de matemáticas ha preseleccionado algunos estudiantes para participar en las pruebas nacionales de matemáticas. Como todos cumplen los requisitos necesarios, el profesor va a escoger al azar solamente a 3 de ellos y encuentran que puede hacer 56 posibles selecciones.

¿Cuántos estudiantes conforman el grupo preseleccionado?

- A. 8
- B. 7
- C. 6
- D. 5

15. El departamento de mercadeo de una fábrica de bebidas hidratantes le presentó a los directivos el siguiente informe sobre el consumo y la producción de tres de sus productos en un mes.

Bebidas hidratantes	Miles de litros vendidos
Refrescos	12
Gaseosas	24
Jugos	16
Total	52



Los directivos consideran que hay sobreproducción de un producto en un periodo, si no se vende el 40% de los productos o más.

Un funcionario analizó el informe y afirmó que durante el mes reportado hubo sobreproducción en los tres tipos de bebidas. Esta afirmación es

- A. verdadera, porque el número de litros producidos es mayor que el de litros vendidos.
- B. falsa, porque por cada cuatro gaseosas producidas se vendieron tres gaseosas.
- C. verdadera, porque el 48% del total producido en el mes no se vendió.
- D. falsa, porque el total de bebidas vendidas supera el 40% del total de las producidas.

16. Mariana necesita comparar el área de las regiones sombreadas de las figuras 1 y 2, para saber cuál es la de menor área.

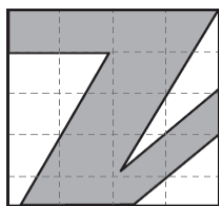


Figura 1

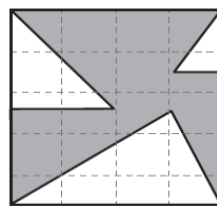
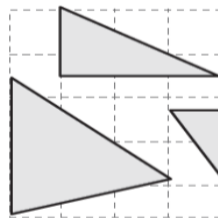
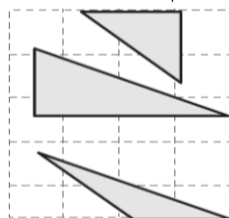


Figura 2

Mariana propone comparar las áreas de las regiones no sombreadas:



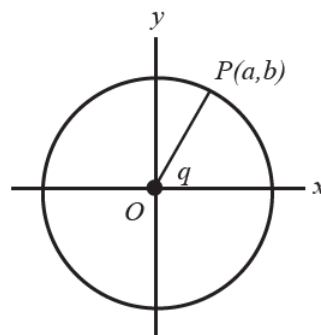
¿Es válida la propuesta de Mariana?

- A. Sí, porque en ambas figuras se extrajo la misma cantidad de triángulos, lo cual hace más sencilla la comparación.
- B. Sí, porque es posible calcular el área de los tres triángulos extraídos en cada figura.
- C. No, porque los triángulos están en una posición distinta de la que se encontraban en las figuras originales
- D. No, porque la figura 2 es más grande y no es necesario comparar los triángulos.

17. El punto P de coordenadas (a, b) es un punto cualquiera sobre la circunferencia de centro O en $(0,0)$ y radio 1. El segmento OP forma un ángulo de q radianes con el eje x .

Si $\text{Sen } \theta = \frac{1}{3}$ y $\text{Cos } \theta < 0$ entonces $\text{Tan } \theta$ es:

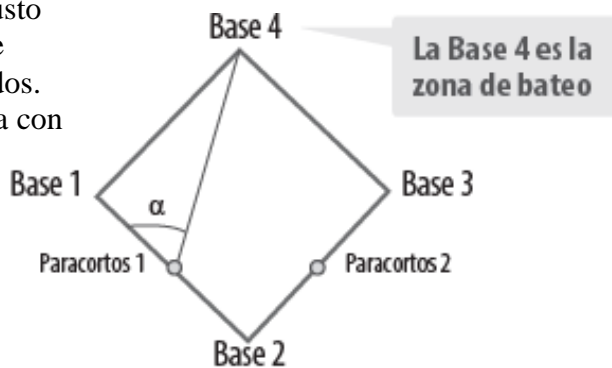
- A. -3
- B. $-\frac{1}{2}$
- C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
- D. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$



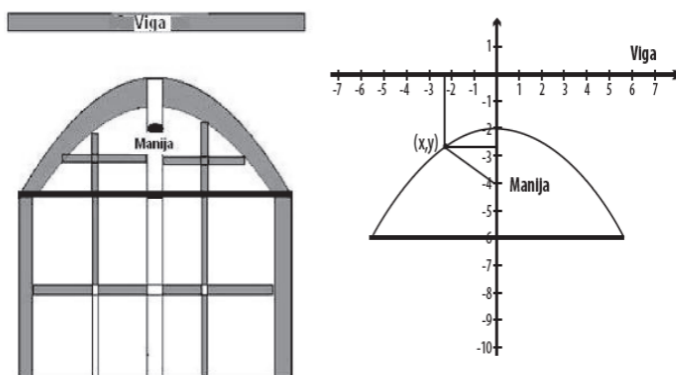
18. El diamante de béisbol es un cuadrado de 90 pies de lado. Los vértices del cuadrado son denominados bases del campo y los puntos medios de dos de sus lados, posición de paracortos. En la figura se representa el diamante.

Un jugador batea una pelota que va a dar justo en la posición del paracortos 1. Se sabe que el ángulo α mide aproximadamente 63 grados. El desplazamiento de la pelota se determina con la expresión:

- A. $\frac{90 \text{ pies} \times \text{sen } 63^\circ}{\text{sen } 90^\circ}$
- B. $\frac{90 \text{ pies} \times \text{sen } 90^\circ}{\text{sen } 63^\circ}$
- C. $\frac{45 \text{ pies} \times \text{sen } 27^\circ}{\text{sen } 90^\circ}$
- D. $\frac{45 \text{ pies} \times \text{sen } 63^\circ}{\text{sen } 27^\circ}$



19. La pieza superior de la ventana que se representa en la figura 1 se construyó en forma de arco de parábola. La manija de la ventana y la viga de amarre están ubicadas a la misma distancia del borde superior de la ventana; y de la manija a la viga hay 4 unidades. En el plano cartesiano de la figura 2 se representa la situación, tomando la viga como eje x .

**RECUERDE**

La distancia entre dos puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ del plano coordenado está dada por:

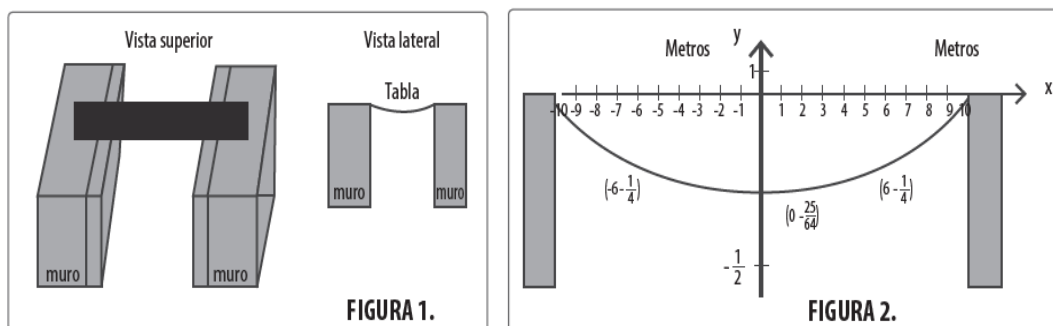
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

¿Cuál de las siguientes ecuaciones describe el lugar geométrico de los puntos ubicados en el borde superior de la ventana?

- A. $y^2 + 8x + 16 = 0$
- B. $x^2 + 4y + 8 = 0$
- C. $x^2 - 8y + 8 = 0$
- D. $x^2 + 8x + 16 = 0$

20. Dos muros de una obra están separados 20 metros, para transitar entre ellos se ubicó una tabla. Transcurrido un tiempo y debido al peso de las personas que transitan por la tabla, ésta sufrió una deformación que vista lateralmente se asocia a una forma parabólica como se muestra en la figura 1.

En la figura 2 se representa la situación sobre un sistema de coordenadas cartesianas; la mayor deformación se presenta en la mitad de la tabla y es de $\frac{25}{64}$ metros.



¿Cuál de las siguientes ecuaciones describe la parábola representada en la figura 2?

- A. $y = \frac{1}{256}x^2 - \frac{25}{64}$
- B. $y = \frac{409}{4}x^2 - \frac{25}{64}$
- C. $y = -\frac{1}{256}x^2 - \frac{25}{64}$
- D. $y = -\frac{1}{256}x^2 + \frac{25}{64}$

Responde las preguntas 21 y 22 de acuerdo a la siguiente información

La siguiente figura muestra una maqueta para una construcción.

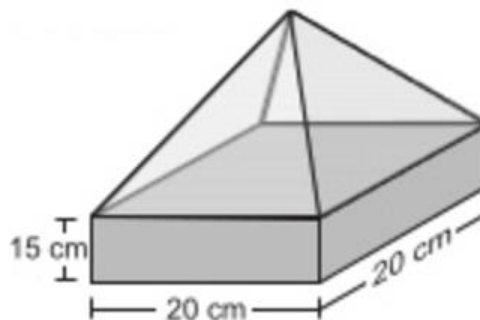
La maqueta está formada por un paralelepípedo y una pirámide de base cuadrada de 20 cm de lado. Las caras laterales de la pirámide son triángulos equiláteros.

21. El área de cada una de las caras laterales de la pirámide es

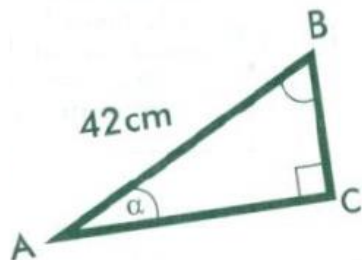
- A. $100\sqrt{2}cm^2$
- B. $100\sqrt{3}cm^2$
- C. $300\sqrt{2}cm^2$
- D. $300\sqrt{3}cm^2$

22. La altura total d la maqueta está entre

- A. 10 cm y 20 cm
- B. 20 cm y 25 cm
- C. 25 cm y 35 cm
- D. 35 cm y 40 cm



23. La gráfica nos muestra un modelo de escuadra, donde el ángulo α mide 30° y el lado \overline{AB} 42 cm



RECUERDE

$$\text{Sen } 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{Cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La medida del lado \overline{AC} es:

- A. 21 cm
- B. 36 cm
- C. $24\sqrt{3}$ cm
- D. $21\sqrt{3}$ cm

24. En el triángulo PQR se verifican las relaciones

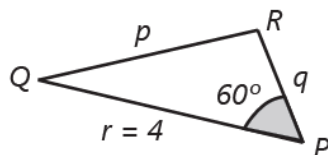
$$p^2 = q^2 + r^2 - 2qr\text{Cos}P.$$

$$q^2 = p^2 + r^2 - 2pr\text{Cos}Q.$$

$$r^2 = p^2 + q^2 - 2pq\text{Cos}R.$$

Además se sabe que, $r = 2q$. ¿Cuál es la medida del lado p?

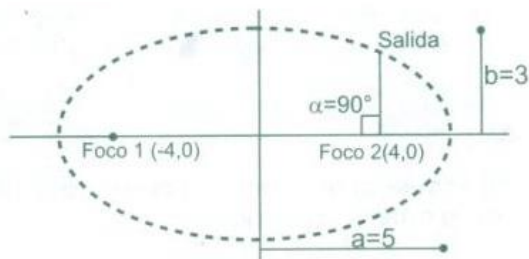
- A. 28
- B. 12
- C. $\sqrt{28}$
- D. $\sqrt{12}$



Recuerde que

$$\text{Cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$$

25. La figura representa una pista de patinaje de carreras construido de forma elíptica, ubicada en un sistema de coordenadas cartesianas

**RECUERDE**

La Ecuación de una elipse con centro en el origen es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ siendo a y b constantes

- La coordenada del punto de salida respecto al centro de la pista es
- A. $\left(4, \frac{16}{7}\right)$
 B. $\left(-4, -\frac{16}{7}\right)$
 C. $\left(4, \frac{9}{5}\right)$
 D. $\left(-4, \frac{9}{5}\right)$
26. Para hacer un dibujo, Sergio dispone de un trozo de papel que tiene forma cuadrada de lado 20cm. Sergio decide dibujar un triángulo en la hoja; luego de calcular su área, afirma que el área de dicho triángulo es 4.000 cm^2 . Antonia debe decidir si acepta o rechaza la afirmación de Sergio. ¿Cuál de las siguientes decisiones es correcta?
- A. Aceptar la afirmación, porque como el papel tiene 20 cm de lado el área calculada debe ser múltiplo de 20.
 B. Rechazar la afirmación, porque con base y la altura iguales a 20cm el triángulo debe tener área 200 cm^2 y no 4.000 cm^2 .
 C. Aceptar la afirmación, porque para cualquier valor positivo es posible formar triángulos con esta área.
 D. Rechazar la afirmación, porque el valor del área reportado es superior al valor del área de la hoja en la que se hizo el dibujo.
27. Se va a construir un estuche con cremallera para guardar un libro cuya portada, de forma rectangular, tiene 72 cm^2 de área. La cremallera se asegurará a tres de los bordes del estuche como se muestra en la figura.

¿Cuál debe ser la mínima longitud de la cremallera que se va a colocar al estuche?

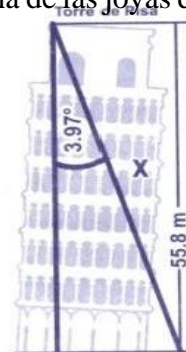
- A. 18 cm.
 B. 24 cm.
 C. 26 cm.
 D. 30 cm.



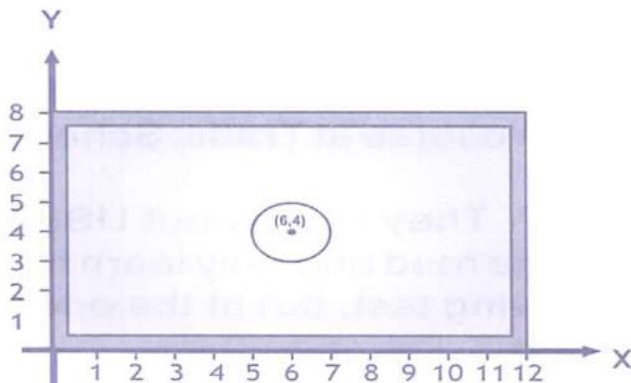
28. La torre comenzó a inclinarse tan pronto como se inició su construcción en agosto de 1173. Su altura es de 55.8 metros desde la base, su peso se estima en 14700 toneladas y la

inclinación de unos 3.97° . Tiene 8 niveles. La escalera interna en espiral tiene 294 escalones. Está considerada, junto a la catedral de la que forma parte, una de las joyas del arte Románico. La expresión que permite calcular el valor de X es

- A. $X = \frac{55.8 \text{ m}}{\cos 3.97^\circ}$
 B. $X = \frac{55.8 \text{ m}}{\sin 3.97^\circ}$
 C. $X = \frac{3.97^\circ}{\sin 55.8^\circ}$
 D. $X = \frac{3.97^\circ}{\cos 55.8^\circ}$



29. Al lanzar una piedra dentro de una piscina, se observan ondas de forma circular en la superficie del agua. En el plano cartesiano de la figura se representa una vista superior de la piscina y la onda que se forma 5 segundos después de lanzar la piedra.



RECUERDE

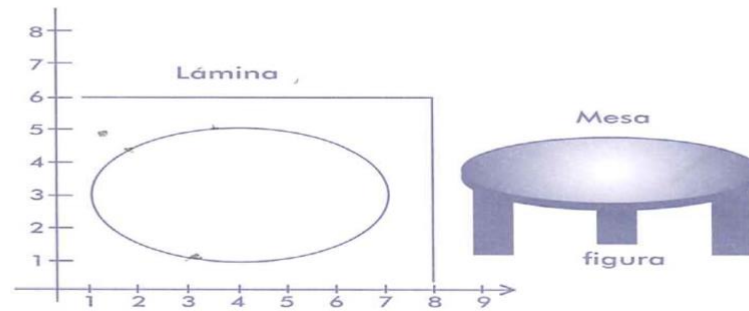
La Ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ tiene como representación gráfica una circunferencia con radio r y centro en el punto (h, k)

¿Cuál es la ecuación que describe la circunferencia que forma la onda de la piscina?

- A. $(x + 6)^2 + (y + 4)^2 = 1$
 B. $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 1$
 C. $(x + 4)^2 + (y + 6)^2 = 1$
 D. $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 1$

30. En el plano cartesiano de la figura se muestra una lámina de madera con la cual se va a construir una pieza elíptica para elaborar una mesa.

Sobre la lámina se dibuja la elipse definida por la ecuación $\frac{(X-4)^2}{9} + \frac{(Y-3)^2}{9} = 1$ y una máquina realiza el corte por el borde de la figura.



¿Por cuál de los siguientes puntos (x,y) no efectúa el corte la máquina?

- A. $(4,5)$
- B. $(7,3)$
- C. $(5,1)$
- D. $(1,3)$

Se le agradece su valiosa participación en este estudio de investigación.

<i>Est 24</i>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
<i>Est 25</i>	1	3	4	1	2	1	1	2	1	1
<i>Est 26</i>	1	3	3	2	2	1	1	3	1	1
<i>Est 27</i>	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1
<i>Est 28</i>	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1
<i>Est 29</i>	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1
<i>Est 30</i>	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1
<i>Est 31</i>	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1
<i>Est 32</i>	1	3	2	1	2	1	2	1	1	1
<i>Est 1</i>	2	2	2	1	1	2	1	1	1	1
<i>Est 2</i>	2	2	3	1	2	1	3	1	1	1
<i>Est 3</i>	2	4	3	2	3	1	1	1	1	2
<i>Est 4</i>	2	3	2	3	2	2	2	2	2	2
<i>Est 5</i>	2	3	3	2	2	3	4	3	3	3
<i>Est 6</i>	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1
<i>Est 7</i>	2	3	1	1	1	1	1	1	1	1
<i>Est 8</i>	2	1	3	1	1	3	3	1	2	2
<i>Est 9</i>	2	2	2	1	1	1	2	2	1	1
<i>Est 10</i>	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2
<i>Est 11</i>	2	2	4	1	2	3	2	3	2	2
<i>Est 12</i>	2	3	4	2	3	3	3	4	3	3
<i>Est 13</i>	2	4	4	4	4	3	4	4	4	4
<i>Est 14</i>	2	3	3	3	3	3	1	1	1	2
<i>Est 15</i>	2	2	3	2	2	3	3	4	3	2
<i>Est 16</i>	2	3	1	2	2	3	2	2	2	2
<i>Est 17</i>	2	4	4	4	4	4	3	2	3	4
<i>Est 18</i>	2	3	2	2	2	1	3	2	2	2
<i>Est 19</i>	2	3	3	2	2	2	2	3	2	2
<i>Est 20</i>	2	3	1	1	1	1	2	1	1	1
<i>Est 21</i>	2	4	3	1	2	2	3	4	3	2
<i>Est 22</i>	2	2	2	2	2	2	3	1	2	2
<i>Est 23</i>	2	3	4	1	2	4	4	4	4	3
<i>Est 24</i>	2	4	4	3	4	3	4	4	4	4
<i>Est 25</i>	2	1	3	3	2	1	3	3	2	2
<i>Est 26</i>	2	3	1	2	2	1	1	1	1	1
<i>Est 27</i>	2	3	2	3	2	1	1	2	1	2
<i>Est 28</i>	2	3	4	2	3	2	3	4	3	3

Anexo L. Formato de validación de instrumentos.

El siguiente formato de validación de instrumentos fue tomado de Corral (2009).

ÍTEM	CRITERIOS A EVALUAR										Observaciones (Por favor indique si debe eliminarse o modificarse un ítem)		
	Claridad en la redacción		Coherencia interna		Inducción a la respuesta (Sesgo)		Lenguaje adecuado con el nivel del informante		Mide lo que pretende				
	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No			
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
25													
26													
27													
28													
29													
30													
ASPECTOS GENERALES										Sí	No		
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder el cuestionario													
Los ítems permiten el logro del objetivo de la investigación													
Los ítems están distribuidos en forma lógica y secuencial													
El número de ítems es suficiente para recoger la información. En caso de ser negativa su respuesta, sugiera los ítems a añadir													
VALIDEZ													
Aplicable			No aplicable						Aplicable atendiendo a las observaciones				
Validado por									Firma				
C.C N°				Celular				Fecha				e-mail	

*Anexo M. Constancia de juicio de experto***CONSTANCIA DE JUICIO DE EXPERTO****Nombre del experto:** _____**Especialidad:** _____

Por medio de la presente hago constar que realice la revisión del instrumento utilizado para la recolección de datos elaborado por la estudiante de Maestría en Educación de la Universidad de Córdoba Lenis Judith Sierra Llorente quien está realizando un trabajo de investigación titulado *“Influencia del aprendizaje colaborativo mediado por un ambiente de liderazgo, en el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de media académica”*

Una vez indicadas las correcciones pertinentes considero que el instrumento reúne los requisitos suficientes y necesarios para ser considerado válido y confiable y por tanto apto para su aplicación.

Atentamente;

Firma.
C.C.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- Arreguín, L., Alfaro, J. y Ramírez, M. (2012). Desarrollo de competencias matemáticas en secundaria usando la técnica de aprendizaje orientado en proyectos. *Reice. Vol (10)*, pp 264-284
- Bernaza, G. y Lee, F. (SA). *El aprendizaje colaborativo: una vía para la educación de postgrado*. Revista Iberoamericana de Educación. (consultada, diciembre 13 de 2016). Recuperado de <https://rieoei.org/historico/deloslectores/1123Bernaza.pdf>
- Bustos, L. (SA) *¿Se puede organizar la clase de matemáticas a través de un trabajo colaborativo y a su vez abordar la resolución de problemas como método de enseñanza- aprendizaje de un concepto matemático?* Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1991/1/Trabajo_colaborativo_y_resoluci%C3%B3n_de_problemas.pdf
- Cárdenas, D. Ceballos, C. y Cohen, P. (2017). Aprendizaje colaborativo en estudiantes de básica secundaria en Colombia. *Revista gestión, competitividad e innovación*. Recuperado de: <https://pca.edu.co/investigacion/revistas/index.php/gci/article/view/110/110>
- Cárdenas, J. (2016). MLIS - *Construcción de instrumento para medir el liderazgo en estudiantes de secundaria*. (Tesis de pregrado). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima-Perú.
- Chiavenato, I. (2007). *Introducción a la teoría general de la administración*. (7ma ed.). México D.F. Editorial Mc Graw Hill.
- Collazos, C., Guerrero, L., y Vergara, A. (2001). *Aprendizaje colaborativo: Un cambio en el rol del profesor*. Proceedings of the 3rd Workshop on Education on Computing, Punta Arenas, Chile.
- Corral, Y (2009). Validez y confiabilidad de los instrumentos de investigación para la recolección de datos. *Revista ciencias de la educación. Volumen (19)*. Recuperado de: <http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/n33.html>
- Díaz, D. y Palomino, J. (2016). *Estrategias metacognitivas para el desarrollo de competencias genéricas en la resolución de problemas matemáticos de tipo numérico variacional en estudiantes de grado noveno*. (Tesis de maestría). Sistema de Universidades Estatales del Caribe Colombiano. Colombia
- Escobar, J. y Cuervo-Martínez, A. (2008). *Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización*. En *Avances en Medición*, 6, pp. 27-36. Recuperado de: [http://www.humanas.unal.edu.co/psicometria/files/7113/8574/5708/Articulo3_Juicio de expertos 27-36.pdf](http://www.humanas.unal.edu.co/psicometria/files/7113/8574/5708/Articulo3_Juicio_de_expertos_27-36.pdf)

- Estrada, B. y Atuesta, M. (SA). *Interacción social y aprendizaje*. Recuperado de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-171104_archivo.pdf
- Inhelder, B. y Piaget, J. (1985). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Paidós. Barcelona. (Original francés publicado en 1955).
- Fennema E. y Sherman J. (1976). Fennema-Sherman Mathematics Attitude Scales, *Catalogue of Selected Documents in Psychology*, 6. 324-326.
- Forgasz, H. y Leder, G. (1996). Mathematics classrooms, gender and affect. *Mathematics Education Research Journal*, 8(2), 153 – 173.
- Fuentes, N., Portillo, J. y Robles, J. (2015). Desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico según el modelo de van hiele y su relación con los estilos de aprendizaje. *Panorama*, 9(16), 44-54.
- Galarza, M y Páramo, O. (2015). *La autoevaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje como mediación para la innovación de los ambientes escolares en el aula*. (Tesis de posgrado). Universidad Libre. Colombia
- García, I. y De la cruz, G. (2014). Las guías didácticas: recursos necesarios para el aprendizaje autónomo. *Edumecentro*. Recuperado de: http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2077-28742014000300012
- Garrison, D., Anderson, T., y Archer, W. (2001). *Critical thinking and computer conferencing: a model and tool to access cognitive presence*. *American Journal of Distance Education*, 15(1)
- Gómez-Chacón, I.M^a. (2010). *Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto*. Universidad Complutense, PP. 5 *La importancia de las matemáticas en la vida* (2016). Recuperado de: <https://www.smartick.es/blog/index.php/la-importancia-de-las-matematicas-en-la-vid/>
- Hallinger, P. y Heck, R. (2014). Liderazgo colaborativo y mejora escolar: Comprendiendo el impacto sobre la capacidad de la escuela y el aprendizaje de los estudiantes. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación REICE, Volumen (12)*. pp. 71-88. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/pdf/551/55131688004.pdf>
- Hernández, R., Fernández C., Baptista P. Metodología de la investigación. (6th ed.). 2014. México. MCGRAW-HILL / Interamericana Editores, S.A. de C.V.
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. [ICFES] (2016a). Saber 9°. *Lineamientos para las aplicaciones muestral y censal 2016*. Recuperado el 30 de noviembre de 2016 de <https://es.scribd.com/document/327847999/Guia-3-Lineamientos-Para-Las-Aplicaciones-Muestral-y-Censal-2016-v3>

- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. [ICFES] (2016b). *Resultados pruebas saber 9° en matemáticas*. Recuperado el 27 de febrero de 2017 de <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.aspx>
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. [ICFES] (2016c). Saber 3°, 5° y 9°. *Lineamientos para las aplicaciones muestral y censal 2016*. Recuperado el 30 de noviembre de 2016 de <https://drive.google.com/file/d/0B8KI8UtgIVJgZjluaUZYMkNGeE0/view>
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. [ICFES] (2016d). Lineamientos generales para la presentación del examen de Estado Saber 11.° Recuperado el 30 de noviembre de 2016 de <http://calidadeducativa.santander.gov.co/wp-content/uploads/2015/03/Gu%C3%ADa-lineamientos-generales-Saber-11.pdf>
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. [ICFES] (2017). *Documentos*. Recuperado el 13 de mayo de 2017 de <http://www.icfes.gov.co/instituciones-educativas-y-secretarias/pruebas-saber-3-5-y-9/informacion-de-la-prueba-saber3579>
- Johnson, D., y Johnson, R. (1989). *Cooperation and learning: theory and research*. Edina, MN: Interaction Book Company.
- Johnson, D., y Johnson, R. (1999). *Learning together and alone: cooperative, competitive, and individualistic learning* (5th ed.). Boston: Allyn & Bacon
- Johnson, D., Johnson, R. y Holubec, E. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Editorial Paidós. Buenos Aires
- Kirschner, P., Van Vilteren, P., Hummel, H., y Wigman, M. (1997). *A study environment for acquiring academic and professional competence*. Studies of Higher Education, 22(2).
- Keen, K. (1992). *Competence: ¿what is it and how can it be developed?* In J. Lowyck, P. de Potter, J. Elen (Eds.), *Instructional design: implementation issues* (pp. 111–122). Brussels, Belgium: IBM Education Center.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Guía sobre lo que los estas deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Documento No. 3. mayo de 2006, pp. 57-71.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2017a) *Matemáticas 8*. Ediciones SM S.A
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2017b) *Matemáticas 10*. Ediciones SM S.A
- Muñoz y Mato. (2006). *Actitudes hacia la Matemática y el rendimiento académico en estudiantes de 5.º de Secundaria*. Red n.º 7, Callao.

- Ortiz, L. (2015). *Proyectos Colaborativos para el desarrollo del pensamiento numérico en básica primaria*. (Tesis de maestría). Universidad EAFIT. Colombia
- Pano, S. (2015). *Una forma diferente de enseñar ciencias, a través del aprendizaje cooperativo en Primaria*. (Tesis de maestría). Universidad Internacional de la Rioja. España.
- Pacheco, C. y Reyes, F. (2018). *Escenarios lúdicos para el desarrollo del pensamiento numérico variacional en estudiantes de séptimo grado de las instituciones educativas san isidro y caño viejo palotal*. (Tesis de maestría). Sistema de Universidades Estatales del Caribe Colombiano. Colombia
- Pérez, A. (2017). *La colaboración como mediación en el aprendizaje de las matemática*. (Tesis de pregrado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Colombia.
- Pons, M., González, M. y Serrano, J. (2008). Aprendizaje cooperativo en matemáticas: Un estudio intracontenido. *Servicio de Publicaciones de la Universidad de Murcia. Volumen (24), n° 2*, pp 253-261
- Prado A., Navarro Y., Berguido S. y De la Cruz, J. (2013). *El Porqué De La Apatía a las Matemáticas*. Centro Regional Universitario De Panamá Oeste. Julio 2013. (Consulta: mayo 15 de 2014). Recuperado de <http://www.monografias.com/trabajos97/por-que-apatia-matematica/por-que-apatia-matematica.shtml#ixzz32BNgXRJw>
- Piaget, J. (1978). *Introducción a la epistemología genética. I. El pensamiento matemático* (2a. ed.). Paidós. Buenos Aires. (Original francés publicado en 1950).
- Prescott (1993). *A dilemma of dioxygenases (or where biochemistry and molecular biology fail to meet)*. *Journal of Experimental Botany*44, 849–861
- Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos. [PISA] (2015a). *Resultados pruebas PISA en matemáticas*. Recuperado el 20 de febrero de 2017 de <https://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf>
- Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos. [PISA] (2015b). *Resultados pruebas PISA en matemáticas en Colombia*. Recuperado el 20 de febrero de 2017 de <http://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-Colombia.pdf>
- Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos. [PISA] (2015). *Resultados pruebas PISA en matemáticas en Colombia*. Recuperado el 20 de febrero de 2017 de <http://www.compareyourcountry.org/pisa/country/col?lg=es>
- Ruiz, C. (2002). *Instrumentos de Investigación Educativa. Venezuela: Fedupel*.

- Sáenz, E. y Patiño, M. (2017). *La resolución de problemas desde el modelo de george polya, como estrategia didáctica para desarrollar el pensamiento geométrico en los estudiantes de grado 5° de la institución educativa villa cielo de montería*. (Tesis de maestría). Sistema de Universidades Estatales del Caribe Colombiano. Colombia
- Sánchez J. y Ursini, S. (2010). *Actitudes hacia las matemáticas y matemáticas con tecnología: estudios de género con ests de secundaria*. México: La experiencia mexicana con EMAT.
- Segura, M. y Chacón, I. (1996). *Competitividad en la educación superior*. Umbral, 11 (5), 29-37
- Valentini, R. (SA) *Reflexiones Sobre El Fenómeno De La Apatía En Ámbitos Escolares*. Buenos Aires- República de Argentina. (Consulta, noviembre 22 de 2016). Recuperado de <http://www.educar.org/articulos/apatia.asp>
- Vásquez, L. (2012). *Aprendizaje Colaborativo a lo largo de la historia y sus Características*. Aprender en Comunidad. Recuperado de <https://aprenderencomunidad.wordpress.com/2012/08/07/aprendizaje-colaborativo-a-lo-largo-de-la-historia-y-sus-caracteristicas/>
- Zañartu, L (2011). *Aprendizaje colaborativo: una nueva forma de Diálogo Interpersonal y en Red*. Revista digital de educación y nuevas tecnologías. Recuperado de <http://contexto-educativo.com.ar/2003/4/nota-02.htm>.